

# Final de Álgebra

22/12/2021

## Ejercicio 1

Sea  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  y sea  $\mathcal{F}$  el conjunto de funciones  $f$  de  $A$  en  $A$ . Se define la relación siguiente en  $\mathcal{F}$ :

$$f \mathcal{R} g \iff f(2) \leq g(2).$$

- (a) Estudiar si  $\mathcal{R}$  es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.
  - (b) Sea  $f \in \mathcal{F}$  la función definida por  $f(m) = r_8(7m)$  para  $m \in A$ . Calcular la cantidad de funciones  $g \in \mathcal{F}$  que satisfacen que  $f \mathcal{R} g$ , y también la cantidad de funciones **inyectivas**  $h \in \mathcal{F}$  que satisfacen que  $f \mathcal{R} h$ .
- 

## Ejercicio 2

Sea  $a \in \mathbb{Z}$  tal que  $a \equiv 2 \pmod{28}$ . Clasificar los valores que toma

$$(3a + 196^n : 2a - 196^n)$$

según los distintos valores de  $a$ , descritos en la forma  $a \equiv r \pmod{m}$  para  $r, m \in \mathbb{N}$  adecuados, y de  $n \in \mathbb{N}$ .

---

## Ejercicio 3

Sea  $\omega = e^{\frac{\pi}{3}i}$ , y sea  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de números complejos definida por:

$$z_1 = \omega - 1 \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{z_n}^{3n+8}, \quad \forall n \geq 1.$$

Calcular  $z_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

---

## Ejercicio 4

- (a) Determinar todos los  $a, b \in \mathbb{Z}$  **coprimos** y no nulos para los cuales el polinomio

$$X^4 + iX^3 + 2X^2 + aiX + b$$

tiene al menos una raíz **racional**.

- (b) Para cada par de valores hallado, factorizar el polinomio obtenido en  $\mathbb{C}[X]$ .