Recuperatorio de lógica

Lógica y computabilidad

Verano 2019

El examen es a libro abierto y se puede suponer demostrado lo dado en las clases y los ejercicios de las guías colocando referencias claras. Entregar cada ejercicio en hojas separadas. En cada hoja deben figurar nombre y apellido.

Ejercicio 1. En lógica proposicional, se denomina *complejidad de una fórmula* φ a la cantidad de símbolos $\rightarrow$ y $\neg$ que aparecen en φ. Análogamente, la complejidad de un conjunto de fórmulas Γ es la mayor de las complejidades de las fórmulas de Γ. Si esa complejidad no es acotada, se dice que Γ tiene complejidad infinita. En caso contrario, Γ tiene complejidad finita. Sea Γ un conjunto consistente de fórmulas de la lógica proposicional. Decida y justifique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. Existe un $\tilde{\Gamma}$ de complejidad finita tal que $\tilde{\Gamma} \models \Gamma$.

b. Sea $\tilde{\Gamma}$ de complejidad finita tal que $\tilde{\Gamma} \models \Gamma$. Entonces, $\Gamma \models \tilde{\Gamma}$.

Ejercicio 2. Decimos que una conjunto de fórmulas de la lógica proposicional Γ es *completo* si para cada fórmula φ sucede que $\varphi \in \Gamma$ o $\neg\varphi \in \Gamma$. Sean Γ_1 y Γ_2 dos conjuntos de fórmulas de la lógica proposicional tales que $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, Γ_1 es completo y Γ_2 es satisfacible. Demostrar que $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

Ejercicio 3. Considere un lenguaje de primer orden con igualdad $\mathcal{L} = \{\text{nil}\} \cup \{\text{next}/1\}$ (i.e., con una constante nil, un símbolo de función unario next y la igualdad usual). Sea $\mathcal{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura; decimos que "$\mathcal{A}$ es un modelo de listas circulares" sii sucede que

1. $\text{next}_{\mathcal{A}}(\text{nil}_{\mathcal{A}}) = \text{nil}_{\mathcal{A}}$
2. para todo $a \in A$ existe un $k \geq 1$ tal que $\underbrace{\text{next}_{\mathcal{A}}(\text{next}_{\mathcal{A}}(\ldots \text{next}_{\mathcal{A}}(\text{next}_{\mathcal{A}}}_{k}(a))\ldots) = a$

Demostrar que no existe ninguna sentencia φ tal que para todo modelo $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \varphi$ sii $\mathcal{A}$ es un modelo de listas circulares.

Ejercicio 4. Vamos a llamar $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}; 0; *_2 \rangle$ al modelo usual de los números naturales con cero y la función que multiplica un natural por 2. Considerar un lenguaje de primer orden con igualdad $\mathcal{L}$ con un símbolo de constante 0 y un símbolo unario de función $*_2$. Sea la siguiente axiomatización SQ_N, que extiende a SQ con los axiomas:

$$\begin{array}{ll} \textbf{S1} & (\forall x)(*_2(x) = x \leftrightarrow x = 0) \\ \textbf{S2} & (\forall x)(\forall y)(x \neq y \rightarrow *_2(x) \neq *_2(y)) \end{array}$$

a) Demostrar que $S2$ es verdadero en $\mathcal{N}$.

b) Demostrar que SQ_N no es completa con respecto a $\mathcal{N}$. Esto significa encontrar una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}$ y un modelo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{N} \models \varphi$, $\mathcal{M} \models SQ_N$, pero $\mathcal{M} \not\models \varphi$.