Algebra I: ejercicios resueltos de parciales y finales

Nahuel Albarracín
Ayudante de 2da del DM, FCEN, UBA
Email: nahuelnehuen89@gmail.com

December 8, 2017

Tabla de Contenidos

1 Números complejos

1.1 Random examples

Dados $z, w \in \mathbb{C}$ que están expresados en la forma

$$z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$$
$$w = |w|(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$$

, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (no necesariamente en $[0, 2\pi)$), entonces se tiene la siguiente equivalencia:

$$z = w \iff |z| = |w| \text{ y } \underbrace{\alpha, \beta \text{ difieren en un múltiplo entero de } 2\pi}_{(\iff \exists\ k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \alpha = \beta + 2k\pi)}$$

Si un complejo z está expresado en la forma $z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces el argumento de z viene dado por $\arg(z) = \alpha - 2\pi k$, donde k es el único entero tal que $\alpha - 2\pi k \in [0, 2\pi)$. (si $\alpha = \arg(z)$, entonces $k = 0$)

Ejemplo
Graficar en el plano complejo:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |z| \leq 1 \text{ y } \arg(z^4) \leq \pi\}$$

Resolución. Tenemos que $\arg(z^4) = 4\arg(z) - 2\pi k_z$, donde $k_z \in \mathbb{N}_0$ es el único tal que $4\arg(z) - 2\pi k_z \in [0, 2\pi)$. Tenemos que

$$\arg(z^4) \leq \pi \iff 4\arg(z) - 2\pi k_z \leq \pi \iff \arg(z) \leq \frac{\pi}{4} + \frac{k_z\pi}{2}$$

Como $0 \leq \arg(z) < 2\pi$, entonces $0 \leq 4\arg(z) \leq 8\pi$. Separemos en los siguientes casos:
- Si $0 \leq 4\arg(z) < 2\pi$ (si y solo si $0 \leq \arg(z) < \frac{\pi}{2}$), entonces $k_z = 0$
- Si $2\pi \leq 4\arg(z) < 4\pi$ (si y solo si $\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) < \pi$), entonces $k_z = 1$
- Si $4\pi \leq 4\arg(z) < 6\pi$ (si y solo si $\pi \leq \arg(z) < \frac{3\pi}{2}$), entonces $k_z = 2$.
- Si $6\pi \leq 4\arg(z) < 8\pi$ (si y solo si $\frac{3\pi}{2} \leq \arg(z) < 2\pi$), entonces $k_z = 3$

Así, dado z tal que $|z| \leq 1$, y teniendo en cuenta que $\arg(z^4) \leq \pi$ si y solo si $\arg(z) \leq \frac{\pi}{4} + \frac{k_z\pi}{2}$, tenemos que:
- Si $\arg(z) < \frac{\pi}{2}$ (en cuyo caso $k_z = 0$), $z \in A$ si y solo si $\arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$.
- Si $\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) < \pi$ (en cuyo caso $k_z = 1$), $z \in A$ si y solo si $\arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$.
- Si $\pi \leq \arg(z) < \frac{3\pi}{2}$ (en cuyo caso $k_z = 2$), $z \in A$ si y solo si $\arg(z) \leq \frac{5\pi}{4}$.
- Si $\frac{3\pi}{2} \leq \arg(z) < 2\pi$ (en cuyo caso $k_z = 3$), $z \in A$ si y solo si $\arg(z) \leq \frac{7\pi}{4}$.

Así, nos queda que

$$A = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |z| \leq 1 \text{ y } \arg(z) \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\pi, \frac{5\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}]\}$$

Se deja como ejercicio graficar el conjunto A. $\square$

Ejemplo
Graficar el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \arg(-iz) > \frac{\pi}{4}\}$.

Resolución.
Primero, observe que es fácil graficar el conjunto $B = \{w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \arg(w) > \frac{\pi}{4}\}$. Para $z \neq 0$, tenemos que

$$z \in A \Longleftrightarrow -iz \in B \Longleftrightarrow z \in iB$$

, de modo que $A = iB$.
El efecto de multiplicar un complejo por i es rotarlo un ángulo $\frac{\pi}{2}$ (en sentido antihorario). Por lo tanto, A es el conjunto B rotado 90 grados en sentido antihorario. $\square$

1.2 Raíces cuadradas

Hallar las raíces cuadradas de un número complejo $z = a + bi$ no nulo (esto es, hallar los dos w tales que $w^2 = z$), y expresarlas en su forma binómica es muy fàcil. Primero, note que si w es una raíz cuadrada de z, $-w$ es la otra raíz cuadrada.
También, note que si $z = r$ un número real, entonces, si $r > 0$, son las soluciones usuales $\pm\sqrt{r}$, y si $r < 0$, las soluciones son $\pm i\sqrt{-r}$.

Resolvamos la ecuación en general: nos es dado un complejo $z = a + bi$ no nulo, y queremos hallar las dos soluciones w tales que $w^2 = z$. Escribiendo $w = x + iy$, tenemos que

$$(x + iy)^2 = a + bi \Longleftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$$

De la igualdades de las partes real e imaginaria, obtenemos que $x^2 - y^2 = a$ y $2xy = b$. También podemos obtener otra ecuación a partir de la igualdad de los módulos: tomando módulo en la ecuación $w^2 = z$, obtenemos que $x^2 + y^2 = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Así, hemos obtenido el siguiente sistema de tres ecuaciones en las variables reales x, y:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Si a la primer ecuación le sumamos la segunda, obtenemos que

$$2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ o sea, } x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

Si a la primer ecuación le restamos la segunda, obtenemos que

$$2y^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ o sea, } y = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

La tercer ecuación del sistema la usamos para determinar el signo de x e y (Es inmediato verificar que con las expresiones halladas de x e y, se tiene $|2xy| = |b|$): si $b > 0$, entonces xy deben tener igual signo, y si $b < 0$, x, y deben tener signos opuestos (y por último, recordar que si $w = x + iy$ es una raíz cuadrada de z, entonces $-w = -x - iy$ es la otra).

Desde luego, no es natural recordar estas fórmulas de memoria para calcular las raíces cuadradas, sino calcularlas planteando las igualdades entre partes real e imaginaria y de módulo en la ecuación $w^2 = z$.

Ejemplo
Hallar las raíces cuadradas de $3 + 4i$

Resolución. Queremos hallar los w tales que $w^2 = 3+4i$. Escribiendo $z = x+iy$, de la igualdad de las partes real e imaginaria en la ecuación, obtenemos que $x^2 - y^2 = 3$ y $2xy = 4$ (o bien, $xy = 2$).
Tomando módulo, obtenemos que $\underbrace{|w|^2}_{=x^2+y^2} = |3 + 4i| = 5$. Así, nos queda el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Sumando la primera y la segunda ecuación, obtenemos que $2x^2 = 8$, o sea, $x = \pm 2$. Restando la segunda ecuación a la primera, obtenemos $2y^2 = 2$, o sea, $y = \pm 1$. En virtud de que el miembro derecho de la tercer ecuación es positivo, x, y deben tener igual signo.

Luego, las raíces cuadradas de $3 + 4i$ son $2 + i$ y $-2 - i$. $\square$

1.3 Resumen de raíces de la unidad

Denotamos G_n al conjunto de raíces n-ésimas de la unidad: $G_n := \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Es inmediato verificar que $|z| = 1$ para todo $z \in G_n$, y que:
- $1 \in G_n$
- Si $z, w \in G_n$, entonces $zw \in G_n$
- Si $z \in G_n$, entonces $z^k \in G_n\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$ (y en particular, $z^{-1} = \overline{z} \in G_n$)

Denotamos G_∞ a la unión de todas las raíces de la unidad:

$$G_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$$

Dado $z \in G_\infty$, llamamos orden de z al mínimo natural n tal que $z \in G_n$, esto es,

$$\text{ord}(z) := min\{n \in \mathbb{N} : z^n = 1\}$$

Un elemento $z \in G_n$ se dice *primitiva en* G_n si $\text{ord}(z) = n$.

Si $z \in G_n$ es primitiva en G_n, entonces se tiene que:

- $\overline{z} = z^{-1}$ es primitiva en G_n.
- $\{1, w, \dots, w^{n-1}\} = G_n$ (porque las n potencias del miembro izquierdo son todos elementos distintos de G_n, pues si existieran $0 \leq i < j \leq n-1$ tal que $w^i = w^j$, entonces $w^{j-i} = 1$, con $0 < j - i < n$, con lo tendríamos que $\text{ord}(w) < n$, que contradice el hecho de ser primitiva de G_n)
- Vale la siguiente equivalencia:

$$\text{para todo } j \in \mathbb{Z},\ w^j = 1 \text{ si y solo si } n|j.$$

(la vuelta vale trivialmente, porque $w \in G_n$. Para ver la ida, escribamos $j = nq + r$, donde $0 \leq r < n$; tenemos que $1 = w^j = (\underbrace{w^n}_{=1})^q w^r = w^r$, así que $w^r = 1$, con $0 \leq r < n$, y como $\text{ord}(w) = n$, se debe tener que $r = 0$, es decir, $n|j$.)
De hecho, si un elemento $w \in G_n$ cumple que para todo $j \in \mathbb{Z}$, $w^j = 1$ implica que $n|j$ (dicho de otra forma, si w cumple que $\{j \in \mathbb{Z} : w^j = 1\} = n\mathbb{Z}$, los múltiplos de n), entonces es primitiva en G_n, con la definición que dimos (es decir, $\text{ord}(w) = n$, que es lo mismo a decir que no existe $j \in \mathbb{N}$ con $j < n$ tal que $w^j = 1$, porque si existiera, entonces $n|j$, con $0 < j < n$, lo cual es absurdo).

Veamos más propiedades:

- $G_n \subseteq G_m$ si y solo si $n|m$.

DEMOSTRACIÓN. Si $n|m$, entonces $m = nq$, con $q \in \mathbb{N}$, así que trivialmente todo elemento de G_n es un elemento de G_m.
Para probar la ida, escribamos $m = nq + r$, con $0 \leq r < n$, y tomemos $z \in G_n$ primitiva (en particular, $z \in G_m$, por hipótesis), Tenemos así que $1 = z^m = (\underbrace{z^n}_{=1})^q z^r = z^r$. Obtuvimos así que $1 = z^r$, que implica, por ser z primitiva de orden n, que $n|r$. Como $0 \leq r < n$, la única posibilidad es que $r = 0$, es decir, $n|m$. $\square$

Dado $n \in \mathbb{N}$, el conjunto de raíces n-ésimas de la unidad en su forma trigonométrica viene dada por $G_n = \{w_k = \cos(\frac{2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{2k\pi}{n}) : 0 \leq k \leq n-1\}$.

• *w_k es primitiva en G_n si y solo si k es coprimo con n* (por consiguiente, hay $\varphi(n)$ raíces primitivas en G_n, donde φ es la función de Euler contadora de números coprimos. En particular, si n es primo, todo elemento de G_n, salvo el 1, es raíz primitiva de G_n)

Demostración.
Demostremos la ida por el contrarrecíproco: supongamos que $1 \leq k \leq n-1$ no es coprimo con n, de modo que existe un primo $2 \leq p \leq n-1$ tal que $p|k$ y $p|n$, de manera que $n = pa$ y $k = pb$ para ciertos $a, b \in \mathbb{N}$. Tenemos que

$$w_k = \cos(\frac{2(\cancel{p}b)\pi}{\cancel{p}a}) + i\sin(\frac{2(\cancel{p}b)\pi}{\cancel{p}a}) = \cos(\frac{2b\pi}{a}) + i\sin(\frac{2b\pi}{a})$$

, de manera que $w_k^a = 1$, con $1 \leq a \leq n-1$, y por lo tanto w_k no es primitiva en G_n.

Probemos la vuelta en forma directa. Debemos ver que para todo $j \in \mathbb{Z}$, vale la siguiente implicación: Si $w_k^j = 1$, entonces $n|j$.
Pues bien, si $w_k^j = 1$, tenemos

$$1 = w_k^j = \cos(\frac{2kj\pi}{n}) + i\sin(\frac{2kj\pi}{n})$$

, que implica que $\frac{2kj\pi}{n}$ es un múltiplo entero de 2π, es decir, existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{\cancel{2}kj\cancel{\pi}}{n} = \cancel{2\pi}a$, equivalentemente, existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $kj = na$, que es decir que $n|kj$, lo cual equivale (por ser n, k coprimos) a que $n|j$, como queríamos probar. $\square$

• *Si $m, n \in \mathbb{N}$ son coprimos, entonces $G_n \cap G_m = \{1\}$ y $G_{mn} = G_nG_m$.*

Demostración. Probemos que $G_n \cap G_m = \{1\}$: como m, n son coprimos, existen $t, s \in \mathbb{Z}$ tal que $1 = ms + nt$. Por lo tanto, si $z \in G_n \cap G_m$, tenemos que

$$z = z^1 = z^{ms+nt} = (\underbrace{z^m}_{=1})^s(\underbrace{z^n}_{=1})^t = 1$$

Luego, $G_n \cap G_m = \{1\}$.
Probemos la otra igualdad: por un lado, es inmediato verificar que $G_mG_n \subseteq G_{mn}$. Para ver que efectivamente son iguales, es suficiente ver que $\#(G_mG_n) = mn$. Por definición, tenemos que

$$G_mG_n = \{zw : z \in G_n, w \in G_m\}$$

Hemos de ver que estos mn productos son todos distintos, con lo cual tenemos exactamente mn elementos en G_mG_n. Pues bien, supongamos que $zw = z'w'$, con $z, z' \in G_n$ y $w, w' \in G_n$ (debemos ver que $z = z'$ y $w = w'$). Reescribiendo esta igualdad, tenemos que

$$\underbrace{z(z')^{-1}}_{\in G_n} = \underbrace{w'w^{-1}}_{\in G_m} \in G_n \cap G_m = \{1\}$$

de modo que $z(z')^{-1} = 1$ y $w'w^{-1} = 1$, es decir, $z = z'$ y $w = w'$, como queríamos probar.

Luego, (reiterando lo explicado), $\#G_m G_n = mn = \#G_{mn}$, y como ya tenemos que $G_m G_n \subseteq G_{mn}$, se concluye que $G_m G_n = G_{mn}$. $\square$

• *Dados $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene que $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$ y $G_n G_m = G_{[m:n]}$* (en el caso en que n, m son coprimos, son las igualdades $G_n \cap G_m = \{1\}$ y $G_n G_m = G_{mn}$, lo cual ya demostramos en el punto anterior).

Demostración.
Llamemos $d = (n : m)$. Si $z \in G_d$, como $d|n$ y $d|m$, tenemos que $m = sd$ y $n = td$, con $s, t \in \mathbb{N}$, de modo que $z^n = (\underbrace{z^d}_{=1})^t = 1$ y análogamente $z^m = 1$, de manera que $z \in G_n \cap G_m$. Recíprocamente, si $z \in G_n \cap G_m$, y escribimos d como combinación lineal de m y n con coeficientes enteros (que es posible pues es el mcd de m y n), es decir, $d = sn + tm$ para ciertos $s, t \in \mathbb{Z}$, nos queda que $z^d = z^{sn+tm} = (\underbrace{z^n}_{=1})^s (\underbrace{z^m}_{=1})^t = 1$, de manera que $z \in G_d$.
Luego, $G_n \cap G_m = G_{(m:n)}$.

Para probar la otra igualdad, usaremos que ya sabemos que vale cuando los índices son coprimos (es decir, si a, b son coprimos, entonces $G_{ab} = G_a G_b$). Sean $p_1, \ldots, p_r$ todos los primos que aparecen en m o n (los primos que aparecen en n, y los primos que aparecen en m). Escribimos

$$\begin{aligned} m &= p_1^{a_1} \ldots p_r^{a_r} \\ n &= p_1^{b_1} \ldots p_r^{b_r} \end{aligned}$$

, con $a_i, b_i \in \mathbb{N}_0$. Tenemos así que

$$G_m G_n = \prod_{i=1}^{r} G_{p_i^{a_i}} \prod_{i=1}^{r} G_{p_i^{b_i}}$$

Ahora bien, sabemos que si $a|b$ entonces $G_a \subseteq G_b$ (que a su vez implica que $G_a G_b = G_b$). Usando esto, tenemos que $G_{p_i^{a_i}} G_{p_i^{b_i}} = G_{p_i^{\max\{a_i, b_i\}}}$ para cada $1 \leq i \leq r$. Nos queda entonces que

$$G_m G_n = \prod_{i=1}^{r} G_{p_i^{\max\{a_i, b_i\}}} = G_{\prod_{i=1}^{r} p_i^{\max\{a_i, b_i\}}} = G_{[m:n]}$$

$\square$

• *Si $m, n \in \mathbb{N}$ son coprimos, entonces el conjunto de primitivas de G_{mn} es*

$$\{zw : z \text{ primitiva de } G_n \text{ y } w \text{ primitiva de } G_m\}$$

(En particular, si $z, w \in G_\infty$ tienen órdenes coprimos, entonces $\text{ord}(zw) = \text{ord}(z)\text{ord}(w)$.)

Demostración. Primero, veamos que todo producto de la forma zw, con z primitiva de G_n y w primitiva de G_m, es una primitiva de G_{mn}: si $(zw)^j = 1$, entonces $\underbrace{z^j}_{\in G_n} = \underbrace{w^{-j}}_{\in G_m} \in G_n \cap G_m \underset{(n:m)=1}{=} \{1\}$, de modo que $z^j = 1$ y $w^j = 1$, que implica (por ser z primitiva de G_n y w de G_m) que $n|j$ y $m|j$, que implica (por ser m, n coprimos) que $nm|j$. Luego, zw es primitiva de G_{mn}

Así, hemos probado que

$$\{zw : z \text{ primitiva de } G_n \text{ y } w \text{ primitiva de } G_m\} \subseteq \underbrace{\{\text{ primitivas de } G_{mn}\}}_{\text{tiene cardinal } \varphi(mn) \underset{(m:n)=1}{=} \varphi(m)\varphi(n)}$$

Luego, basta ver que los $\varphi(m)\varphi(n)$ productos del conjunto del miembro izquierdo son todos distintos. Para ver ello, se usa el mismo argumento que en la demostración de que $G_{mn} \underset{(m:n)=1}{=} G_m G_n$. $\square$

• *Si z es primitiva de G_n, entonces z^k es primitiva de $G_{\frac{n}{(n:k)}}$*. (parafraseado en términos de órdenes: si $z \in G_\infty$ tiene orden n, entonces z^k tiene orden $\frac{n}{(n:k))}$.
En particular, para $z \in G_n$ primitiva, se tiene que z^k es primitiva de G_n si y solo si k es coprimo con n. Note que esto es una generalización del hecho ya conocido de que para $0 \leq k \leq n-1$, $\cos(\frac{2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{2k\pi}{n}) = (\cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n}))^k$ es primitiva de G_n si y solo si k es coprimo con n)

Demostración.
Tenemos que $(z^k)^{\frac{n}{(n:k)}} = z^{\frac{kn}{(n:k)}} = z^{[n:k]} = 1$ (pues $z \in G_n$ y $n|[n:k]$), así que $z^k \in G_{\frac{n}{(n:k)}}$. Resta ver que para todo $j \in \mathbb{N}_0$, vale que $(z^k)^j = 1$ si y solo si $\frac{n}{(n:k)}|j$. Pues bien, tenemos que

$$(z^k)^j = 1 \Longleftrightarrow z^{kj} = 1 \underset{\substack{z \text{ es primitiva} \\ \text{de } G_n}}{\Longleftrightarrow} n|kj \Longleftrightarrow \frac{kj}{n} \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \frac{\frac{k}{(n:k)}j}{\frac{n}{(n:k)}} \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \frac{n}{(n:k)}\Big|\frac{k}{(n:k)}j$$
$$\underset{\substack{\frac{n}{(n:k)} \text{ y } \frac{k}{(n:k)} \\ \text{son coprimos}}}{\Longleftrightarrow} \frac{n}{(n:k)}|j$$

, como queríamos probar.
Luego, z es primitiva de $G_{\frac{n}{(n:k)}}$. $\square$

2 Primeros parciales

2.1 2009, 2do cuatrimestre

Enunciados del Examen

i

1	2	3	4	5	Calificación

Nombre y apellido: ....

N° de libreta: ....

Turno de práctica: ☒ 11 a 14hs ☐ 14 a 17hs ☐ 19 a 22hs

Álgebra I

Primer parcial - 30/10/09

1) Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por:

$$X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X \triangle Y \text{ no contiene números pares.}$$

   a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

   b) Hallar cuántos conjuntos X de dos elementos hay tales que cumplan simultáneamente $\min X \leq 10$ y $X\mathcal{R}\{28, 29\}$.

2) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \geqslant \sqrt{n}.$$

3) Se arrojan cinco dados de distinto color.

   Se hace ESCALERA cuando se obtiene alguna de las siguientes combinaciones: 1-2-3-4-5; 2-3-4-5-6 ó 3-4-5-6-1.

   Se hace FULL si se obtienen tres dados del mismo número y dos iguales de otro.

   a) Cuál es la probabilidad de hacer ESCALERA?

   b) Cuál es la probabilidad de hacer FULL?

4) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números naturales definida recursivamente por

$$a_1 = 4 \qquad a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 32$$

   a) Probar 5 no divide a a_n para ningún $n \in \mathbb{N}$.

   b) Probar que $a_n \equiv 4 \pmod 8$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

5) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Sabiendo que $b \equiv 2 \pmod 4$ y $(a : b) = 7$, hallar

$$(a^2 + 21b + 7 : 4704).$$

Justifique todas las respuestas

Resolución del Ejercicio 1

a) La reflexividad y la simetría son evidentes, pues $X \vartriangle X = \varnothing$ y $X \vartriangle Y = Y \vartriangle X$ para todos X, Y. Para transitividad, usar que $X \vartriangle Z \subseteq (X \vartriangle Y) \cup (Y \vartriangle Z)$, para cualesquiera X, Y, Z.
b) Fijado $a \in \mathbb{N}_{\leq 10}$ y $b \in \mathbb{N}$, $b \neq a$, tenemos que $\{a, b\}\mathcal{R}\{28, 29\}$ sii $(\{a, b\} \setminus \{28, 29\}) \cup (\{28, 29\} \setminus \{b\})$ no contiene números pares, si y solo si $b = 28$ y a es impar (menor o igual que 10). Luego, la cantidad de conjuntos en cuestión es 5.

Resolución del Ejercicio 2

En efecto, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \underset{\sqrt{i} \leq \sqrt{n}\ \forall\ i \leq n}{\geq} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$

Resolución del Ejercicio 3

a) Es evidente que los casos posibles son 6^5, de modo que la probabilidad de hacer ESCALERA es $\frac{3}{6^5}$.
b) Elija los tres dados que sacarán igual número (hay $\binom{5}{3}$ maneras de hacer eso). Elegidos dichos dados, tenemos que elegir en que número coincidirán ellos, y los restantes dos (que no puede ser el mismo número en que coinciden los primeros tres). Luego, la cantidad de maneras de hacer FULL es $\binom{5}{3}6 \cdot 5$, de modo que la probabilidad de hacer FULL es $\frac{\binom{5}{3}6 \cdot 5}{6^5}$.

Resolución del Ejercicio 4

a) $5 \not| 4 = a_1$ y para $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + \underbrace{32}_{\equiv 2\ (5)} \equiv \begin{cases} 2\ (5) & \text{si } a_n \equiv 0 \text{ o } 1\ (5) \\ 4\ (5) & \text{si } a_n \equiv 2 \text{ o } 4\ (5) \\ 3\ (5) & \text{si } a_n \equiv 3\ (5) \end{cases}$.
En cualquiera de los casos, $a_{n+1} \not\equiv 0\ (5)$. Luego, 5 no divide a a_n, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.
b) Para $n = 1$, es trivialmente cierto. Suponiendo que vale para un $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $a_{n+1} = \underbrace{a_n^2}_{\equiv 4^2 \equiv 0\ (8)} - \underbrace{a_n}_{\equiv 4\ (8)} + \underbrace{32}_{\equiv 0\ (8)} \equiv -4 \equiv 4\ (8)$. Luego, $a_n \equiv 4\ (8)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

Resolución del Ejercicio 5

Denotemos $d = (a^2 + 21b + 7 : 4704)$. Tenemos que $4704 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7^2$
Como 7 divide a a y b, es claro que $7|a^2 + 21b + 7$, con lo cual $7|d$.
Si 7^2 dividiera a $a^2 + 21b + 7$, entonces divide a $21b + 7 = 7(3b + 1)$, con lo cual 7 divide a $3b + 1$, con lo cual tendríamos que $7|1$. Luego, la potencia de 7 en d es 7^1.
Si 3 dividiera a d, entonces $3|a^2 + 21b + 7$, con lo cual $3|a^2 + 7$, esto es, $a^2 \equiv -7\ (3)$, o sea, $a^2 \equiv 2\ (3)$, pero esto no ocurre para ningún a. Luego, $d = 7 \cdot 2^j$, con $0 \leq j \leq 5$.
Por hipótesis, b es par, y como además $(a : b) = 7$, entonces a es impar, de manera que $a^2 + 21b + 7$ es par. Módulo 4, tenemos que $a^2 + \underbrace{21b}_{\equiv 1 \cdot 2\ (4)} + 7 \equiv a^2 + 1 \equiv 2\ (4)$ (en cualquiera de los casos, es decir, tanto si $a \equiv 1\ (4)$ como si $a \equiv 3\ (4)$). De manera que 4 no divide a $a^2 + 21b + 7$.
Luego, $d = 7 \cdot 2 = 14$.

2.2 2017, 2do cuatrimestre, recuperatorio

i) Sea A el conjunto de las funciones inyectivas $f : \{1,2,3,4\} \longrightarrow \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Se define la siguiente relación $\mathcal{R}$ en A:

$$f\mathcal{R}g \longleftrightarrow f(2)+f(3) \leq g(2)+g(3)$$

a) Determinar si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica, o transitiva.
b) Sea $f \in A$ la función definida por $f(n) = n+4$. ¿Cuántos elementos $g \in A$ satisfacen $f \in \mathcal{R}g$?

ii) Probar que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$

iii) ¿Cuántos anagramas de la palabra CONJUNTOS pueden formarse:
a) con la condición de que las 3 vocales no sean 3 letras consecutivas.
b) con la condición de que C esté a la izquierda de J y la J a la izquierda de T

iv) Hallar el resto de la división de $\sum_{i=1}^{123}(i^4+4^i)$ por 7

v) Hallar, para cada $n \in \mathbb{N}$, el valor de $d = (7^{n+1}+5^{n+1}, 4\cdot 7^n + 2\cdot 5^n)$.

Resolución del ejercicio 1

a)
REFLEXIVIDAD: Es reflexiva $f\mathcal{R}f$, pues $f(2)+f(3) \leq f(2)+f(3)$.
SIMETRÍA: No es simétrica. Por ejemplo, si $f \in A$ manda el 2 al 2 y el 3 al 3, y g manda el 2 al 3 y el 3 al 4, tenemos que $f(2)+f(3) = 2+3 = 5$, y $g(2)+g(3) = 3+4 = 7$, con lo cual $f\mathcal{R}g$, pero $f \not\mathcal{R} g$.
ANTISIMETRÍA: No es antisimétrica: basta elegir $f, g \in A$ que dejen fijos los elementos $1, 2$ de su dominio (es decir, $f(1) = g(1) = 1$ y $f(2) = g(2) = 2$), pero que difieran en otro elemento del dominio.
TRANSITIVIDAD: Es transitiva. Si $f, g, h \in A$ son tales que $f\mathcal{R}g$ y $g\mathcal{R}h$, entonces

$$f(2)+f(3) \leq g(2)+g(3) \leq h(2)+h(3)$$

, con lo cual $f\mathcal{R}h$.

b) Para la f dada, tenemos que $f(2)+f(3) = 6+7 = 13$. Así, queremos saber cuántas $g \in A$ satisfacen que $13 \leq g(2)+g(3)$.

Veamos primero las asignaciones posibles de valores para $g(2)$ y $g(3)$ (para ello, tenemos en cuenta que para $1 \leq i, j \leq 6$, tenemos que $i+j \leq 6+6 = 12 < 13$, de modo que $g(2)$ o $g(3)$ debe ser 7 u 8, y por otro lado, la máxima suma posible de dos elementos de la imagen, teniendo en cuenta que son funciones inyectivas, es $8+7 = 15$):
-Formas de sumar 13:

$$13 = 7+6 = 6+7 = 8+5 = 5+8 \ \ \text{(4 maneras)}$$

-Formas de sumar 14:

$$14 = 8+6 = 6+8 \ \ \text{(2 maneras)}$$

Formas de sumar 15:

$$15 = 8+7 = 7+8 \ \ \text{(2 maneras)}$$

En total, hay $4+2+2 = 8$ modos de asignaciones de valores para $g(2)$ y $g(3)$, de manera que su suma sea mayor o igual a 13. Para cada una de estas asignaciones, contamos la cantidad de inyecciones de $\{3,4\}$ a $\underbrace{\{1,2,\ldots,8\} \setminus \{g(2), g(3)\}}_{\text{tiene cardinal 6}}$, que es $6 \cdot 5$. Luego, la cantidad de funciones $g \in A$ tales que $f\mathcal{R}g$ es

$$8 \cdot (6 \cdot 5) = 240$$

Resolución del ejercicio 2

Para $n = 1$, la desigualdad es verdadera: $1 \leq \underbrace{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}_{=1}$.

Suponiendo que vale para un $n \in \mathbb{N}$, veamos que vale para $n+1$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^3} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^3} + \frac{1}{(n+1)^3} \underset{\substack{\text{hipótesis}\\ \text{inductiva}}}{\leq} \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{(n+1)^3}$$

Así, basta ver que $\frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2(n+1)^2}$. Pues bien,

$$\begin{aligned}
\cancel{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{(n+1)^3} \leq \cancel{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2(n+1)^2} &\iff \frac{2}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \\
&\iff \frac{2}{(n+1)^3} \leq \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} \\
&\iff \frac{2}{(n+1)} \leq \frac{2n+1}{n^2} \\
&\iff 2n^2 \leq (2n+1)(n+1) \\
&\iff \cancel{2n^2} \leq \cancel{2n^2} + 3n + 1 \\
&\iff 0 \leq 3n + 1, \quad \text{lo cual es cierto}
\end{aligned}$$

Luego, vale la desigualdad del enunciado para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resolución del Ejercicio 3

a) La palabras CONJUNTOS tiene 9 letras, contadas con repetición. La cantidad de formas de elegir 3 ubicaciones consecutivas es $9 - 3 + 1 = 7$, de modo que la cantidad de formas de elegir tres ubicaciones no consecutivas es $\binom{9}{3} - 7$. Luego, la cantidad de anagramas en cuestión es

$$\left(\binom{9}{3} - 7\right) \cdot \underbrace{3}_{\substack{\text{permuto}\\ \text{las vocales}}} \cdot \underbrace{\binom{6}{2}}_{\substack{\text{ubico las}\\ \text{N's}}} \underbrace{4!}_{\substack{\text{ubico la}\\ \text{C,J,T y S}}} = \left(\frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{6} - 7\right) \cdot 3 \cdot \frac{6!}{2!}$$

$$= \left(7 \cdot 4 \cdot 3 - 7\right) \cdot 3 \cdot \frac{6!}{2} = 7 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 5! = 83160$$

b) Elija tres ubicaciones para poner la C, J y T (elegidas esas tres ubicaciones, ya tenemos determinado cómo ubicarlas). Luego, la cantidad de anagramas en cuestión es

$$\binom{9}{3}\binom{6}{2}\binom{4}{2}2 = \frac{9!}{3!\cancel{6!}} \frac{\cancel{6!}}{2!\cancel{4!}} \frac{\cancel{4!}}{2!\cancel{2!}} \cancel{2} = \frac{9!}{6 \cdot 4} = 15120$$

Resolución del Ejercicio 4

Escribamos

$$\sum_{i=0}^{123} (i^4 + 4^i) = \underbrace{\sum_{i=0}^{123} i^4}_{=:x} + \underbrace{\sum_{i=0}^{123} 4^i}_{=:y}$$

Si $i \equiv 0\ (7)$, entonces $i^4 \equiv 0\ (7)$
Si $i \equiv 1\ (7)$, entonces $i^4 \equiv 1\ (7)$
Si $i \equiv 2\ (7)$, entonces $i^4 \equiv 2\ (7)$
Si $i \equiv 3\ (7)$, entonces $i^4 \equiv 4\ (7)$
Si $i \equiv \underbrace{4}_{\equiv -3}\ (7)$, entonces $i^4 \equiv 4\ (7)$
Si $i \equiv \underbrace{5}_{\equiv -2}\ (7)$, entonces $i^4 \equiv 2\ (7)$

Si $i \equiv \underbrace{6}_{\equiv -1}$ (7), entonces $i^4 \equiv 1\ (7)$

Así, teniendo en cuenta que $123 = 7 \times 17 + 4$, y que $120, 121, 122, 123$ son congruentes a $1, 2, 3, 4$ módulo 7 respectivamente (con lo cual sus cuartas potencias son congruentes a $1, 2, 4, 4$ respectivamente) tenemos que

$$x \equiv 17(\underbrace{0+1+2+4+4+2+1}_{=14\equiv 0\ (7)}) + \underbrace{1+2+4}_{\equiv 0\ (7)} + 4 \equiv 4\ (7)$$

Ahora estudiemos la otra sumatoria: tenemos que $4^3 = 64 \equiv 1\ (7)$. Así, miraremos los exponentes módulo 3 (observar que $123 = 3 \cdot 41$):

$$y = \sum_{i=0}^{123} 4^i = 1 + \sum_{i=1}^{123} 4^i = 1 + \sum_{\substack{1 \le i \le 123 \\ i \equiv 0\ (3)}} \underbrace{4^i}_{\equiv 1\ (7)} + \sum_{\substack{1 \le i \le 123 \\ i \equiv 1\ (3)}} \underbrace{4^i}_{\equiv 4\ (7)} + \sum_{\substack{1 \le i \le 123 \\ i \equiv 2\ (3)}} \underbrace{4^i}_{\equiv 4^2 \equiv 2\ (7)}$$

$$= 1 + 41 \cdot 1 + 41 \cdot 4 + 41 \cdot 2 = 1 + 41(\underbrace{1+4+2}_{=7\equiv 0\ (7)}) \equiv 1$$

o alternativamente:

$$\sum_{i=0}^{123} 4^i = \frac{4^{124}-1}{4-1} = 1 \cdot \frac{4^{124}-1}{3} \left(\begin{array}{c}\text{Considero un entero congruente a 1 módulo 7} \\ \text{y a 0 módulo 3: por ejemplo, 15}\end{array}\right)$$

$$\underset{\text{mod } 7}{\equiv} 15 \frac{4^{124}-1}{3} = 5 \cdot (4^{124} - 1) \underset{124 = 3 \cdot 41 + 1}{\equiv} 5 \cdot (4-1) = 15 \equiv 1\ (7)$$

Luego, $x + y \equiv 4 + 1 \equiv 5\ (7)$. Es decir, $r_7\Big(\sum_{i=0}^{123}(i^4 + 4^i)\Big) = 5$.

Resolución del Ejercicio 5

Como d es el mcd de dos números evidentemente pares, entonces $2|d$. Por otro lado,

$$d | 4(7^{n+1} + 5^{n+1}) - 7(4 \cdot 7^n + 2 \cdot 5^n) = 20 \cdot 5^{n+1} - 14 \cdot 5^n = 6 \cdot 5^n$$

y como 5 no divide a d (pues d divide a $7^{n+1} + 5^{n+1}$, que no es divisible por 5), resulta que $d|6$. Así, como además $2|d$, resulta que $d = 2$ y $d = 6$.

Módulo 3, tenemos que

$$7^{n+1} + 5^{n+1} \underset{\substack{7 \equiv 1\ (3) \\ 5 \equiv -1\ (3)}}{\equiv} 1 - (-1)^n$$

$$\underbrace{4}_{\equiv 1} \cdot 7^n + \underbrace{2}_{\equiv -1} \cdot 5^n \equiv 1 - (-1)^n$$

y $1 - (-1)^n$ es congruente a 0 módulo 3 si y solo si n es par.

Luego, $d = 2$ si n es impar, y $d = 6$ es n es par.

3 Segundos parciales

3.1 2009, 2do cuatrimestre

Enunciados del parcial

i

1	2	3	4	5	Calificación

Nombre y apellido: ....

N° de libreta: ....

Turno de práctica: ☒ 11 a 14hs ☐ 14 a 17hs ☐ 19 a 22hs

Álgebra I

Segundo parcial - 18/12/09

1) Hallar todos los primos p que satisfacen $p \mid 3^{p+1} + 5^{p-1} + 1$.

2) 13 ladrones roban 1000 monedas. Mientras se escapan pierden parte del botín. Ya en la guarida reparten las monedas entre los 13 y sobran 5. Luego echan a 2 y distribuyen de nuevo entre los 11 restantes, sobrando 3 monedas. Entonces echan a 4 y vuelven a repartir entre 7, pero sobran 3 monedas otra vez. ¿Cuántas monedas perdieron mientras escapaban?

3) Representar gráficamente el conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$\operatorname{Im}\left(z^3|z|(1+i)\frac{\overline{z}}{2}\right) < 0 \qquad \text{y} \qquad \left|z^3|z|(1+i)\frac{\overline{z}}{2}\right| \leq 16\sqrt{2}.$$

4) Factorizar en $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$ el polinomio

$$f(x) = 2x^5 + 7x^4 - 8x^3 - 54x^2 - 42x + 35$$

sabiendo que el producto de 4 de sus raíces es $\frac{5}{2}\sqrt{7}$.

5) Hallar todos los pares de enteros a, b tales que el polinomio

$$f(x) = x^{15} - x^{14} - 2ax^7 + 7ax^2 - x + 4b$$

tenga una raíz múltiple racional.

Justifique todas las respuestas

Resolución del Ejercicio 1

Hallar todos los primos positivos p tales que $p \mid 3^{p+1} + 5^{p-1} + 1$

Resolución
Aplicaremos el pequeño teorema de Fermat. Si $p \neq 5$ es un primo, entonces p cumple la condición del enunciado si y solo si

$$\underbrace{3^{p+1}}_{\substack{=3^p \cdot 3 \\ \equiv 3 \cdot 3\ (p)}} + \underbrace{5^{p-1}}_{\equiv 1\ (p)} + 1 \equiv 0\ (p) \Longleftrightarrow 11 \equiv 0\ (p) \Longleftrightarrow p = 11$$

Veamos si $p = 5$ cumple la condición del enunciado:

$$3^{5+1} + 5^{5-1} + 1 = \underbrace{3^6}_{\substack{=81 \cdot 9 \\ \equiv 1 \cdot 4\ (5)}} + \underbrace{5^4}_{\equiv 0\ (5)} + 1 \equiv 0\ (5)$$

Luego, los primos que cumplen con la condición del enunciado son 5 y 11.

Resolución del Ejercicio 2

13 ladrones roban 1000 monedas. Mientras se escapan pierden parte del botín. Ya en la guarida se reparte las monedas entre los 13 y sobran 5. Luego echan a 2 y distribuyen de nuevo entre los 11 restantes, sobrando 3 monedas. Entonces echan a 4 y vuelven a repartir entre 7, pero sobran 3 monedas otra vez. ¿Cuántas monedas perdieron mientras escapaban?

Resolución
Si n denota la cantidad de monedas que les quedó despues de perder parte del botín, tenemos que

$$\begin{cases} n \equiv 5\ (13) \\ n \equiv 3\ (11) \\ n \equiv 3\ (7) \end{cases}$$

Dado que los módulos son coprimos dos a dos, el producto de todos ellos es 1001, y $0 \leq n < 1001$, n queda unívocamente determinado por estas tres congruencias (por el teorema chino del resto).
De la primer congruencia, sacamos que $n = 13q + 5$. Sustituimos en la segunda y obtenemos que $\underbrace{13}_{\equiv 2} q + 5 \equiv 3\ (11)$, equivalentemente,

$$2q \equiv -2\ (11), \underset{\substack{\text{Multiplicando por} \\ \text{el inverso de 2} \\ \text{módulo } 11}}{\Longleftrightarrow} q \equiv \underbrace{-1}_{\equiv 10}\ (11)$$

de modo que $q = 11k + 10$, y entonces

$$n = 13(11k + 10) + 5 = (13 \cdot 11)k + 13 \cdot 10 + 5$$

Sustitumos en la tercer ecuación del sistema:

$$(\underbrace{13 \cdot 11}_{\equiv(-1)\cdot(-3)=3})k + \underbrace{\underbrace{13 \cdot 10}_{\equiv(-1)\cdot 3} + 5}_{\equiv 2} \equiv 3\ (7), \Longleftrightarrow 3k \equiv 1\ (7) \underset{(5 \cdot 3 \equiv 1\ (7))}{\Longleftrightarrow} k \equiv 5\ (7)$$

, de modo que $k = 7h + 5$, y luego

$$n = (11 \cdot 13)(7h + 5) + \underbrace{13 \cdot 10 + 5}_{=135} = 1001h + \underbrace{11 \cdot 13 \cdot 5}_{=715} + 135 = 1001h + 850$$

, dado que $0 \leq n \leq 1000$, se tiene que $h = 0$, y por ende $n = 850$.
Luego, la cantidad de monedas que perdieron mientras se escapaban es 150.

Resolución del Ejercicio 3

Representar gráficamente el conjuntos de los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$\text{Im}\Big(z^3|z|(1+i)\frac{\overline{z}}{2})\Big) < 0 \text{ y } \Big|z^3|z|(1+i)\frac{\overline{z}}{2}\Big| \leq 16\sqrt{2}$$

Resolución

La condición sobre el módulo es equivalente a que $|z|^5\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2} \leq 16\cancel{\sqrt{2}}$, o sea, $|z|^5 \leq 2^5$, es decir, $|z| \leq 2$. Llamando $w(z) = z^3|z|(1+i)\frac{\overline{z}}{2}$, la condición Im$(w(z)) < 0$ es equivalente a que arg$(w(z)) \in (\pi, 2\pi)$. Ahora,

$$\text{arg}(w(z)) = 3\text{arg}(z) + \frac{\pi}{4} - \text{arg}(z) - 2\pi k_z = 2\text{arg}(z) + \frac{\pi}{4} - 2\pi k_z$$

. donde el entero k_z está definido por la condición $2\text{arg}(z) + \frac{\pi}{4} - 2\pi k_z \in [0, 2\pi)$:

$$\begin{aligned}0 \leq 2\text{arg}(z) + \frac{\pi}{4} - 2\pi k_z < 2\pi &\iff -2\text{arg}(z) - \frac{\pi}{4} \leq -2\pi k_z < \frac{7\pi}{4} - 2\text{arg}(z)\\ &\iff 2\text{arg}(z) - \frac{7\pi}{4} < 2\pi k_z \leq 2\text{arg}(z) + \frac{\pi}{4}\\ &\iff \frac{\text{arg}(z)}{\pi} - \frac{7}{8} < k_z \leq \frac{\text{arg}(z)}{\pi} + \frac{1}{8}\\ &\underset{\substack{\text{notando arg}(z)=2\pi\alpha_z\\ \text{con } \alpha_z\in[0,1)}}{\iff} \underbrace{2\alpha_z - \frac{7}{8}}_{>-1} < k_z \leq \underbrace{2\alpha_z + \frac{1}{8}}_{<3}\end{aligned}$$

, de modo que $k_z \in \{0, 1, 2\}$.
Tenemos que

$$\begin{aligned}\text{arg}(w(z)) \in (\pi, 2\pi) \iff \pi < 2\text{arg}(z) + \frac{\pi}{4} - 2\pi k_z < 2\pi \iff 2\pi k_z + \frac{3\pi}{4} < 2\text{arg}(z) < \frac{7\pi}{4} + 2\pi k_z\\ \iff \underbrace{\pi k_z + \frac{3\pi}{8}}_{>2\pi \text{ si } k_z=2} < \text{arg}(z) < \frac{7\pi}{8} + \pi k_z\end{aligned}$$

Por la razón arriba marcada, $k_z = 2$ queda descartado.

Para los z tales que $k_z = 0$ (o sea, $\alpha_z < \frac{7}{16}$, es decir, arg$(z) < \frac{7\pi}{8}$), tenemos que arg$(w(z)) \in (\pi, 2\pi)$ si y solo si arg$(z) > \frac{3\pi}{8}$.
Para los z tales que $k_z = 1$ (o sea, $\frac{7}{16} \leq \alpha_z < \frac{15}{16}$, es decir, $\frac{7\pi}{8} \leq$ arg$(z) < \frac{15\pi}{8}$), tenemos que arg$(w(z)) \in (\pi, 2\pi)$ si y solo si arg$(z) > \frac{11\pi}{8}$.
(los z tales que $k_z = 2$ son los que cumplen arg$(z) \geq \frac{15\pi}{8}$, pero vimos que quedan todos descartados)

En definitiva, el conjunto de complejos que cumplen las condiciones del enunciado es

$$\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |z| \leq 2 \text{ y } \text{arg}(z) \in (\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}) \cup (\frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}))\}$$

Graficar este conjunto es ahora trivial.

Resolución del Ejercicio 4

Factorizar en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio

$$f(x) = 2x^5 + 7x^4 - 8x^3 - 54x^2 - 42x + 35$$

, sabiendo que el producto de 4 de sus raíces es $\frac{5}{2}\sqrt{7}$

Resolución
Escribamos primero

$$f(x) = 2(x^5 + \frac{7}{2}x^4 - 4x^3 - 27x^2 - 21x + \frac{35}{2})$$

Si a, b, c, d, e son las raíces de f contadas con multiplicidad, y las primeras cuatro de éstas cumplen que su producto es $\frac{5}{2}\sqrt{7}$, entonces

$$\frac{35}{2} = abcde = \frac{5}{2}\sqrt{7}e, \text{ de donde } e = \frac{7}{\sqrt{7}} = \sqrt{7}$$

Así, $\sqrt{7}$ es raíz de f, y como $f \in \mathbb{Q}[X]$, tenemos que $-\sqrt{7}$ es también raíz de f. En particular, $X^2 - 7$ divide a f. Efectuemos la división de f por $X^2 - 7$:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 2X^3 & +7X^2 & +6X & -5 & & \\
\hline
X^2-7 & 2X^5+7X^4 & -8X^3 & -54X^2 & -42X & +35 & \\
 & -2X^5 & +14X^3 & & & & \\
\hline
 & 7X^4 & +6X^3 & -54X^2 & & & \\
 & -7X^4 & & +49X^2 & & & \\
\hline
 & & 6X^3 & -5X^2 & -42X & & \\
 & & -6X^3 & & +42X & & \\
\hline
 & & & -5X^2 & & +35 & \\
 & & & 5X^2 & & -35 & \\
\hline
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Así, nos queda que

$$f = (X^2 - 7)(\underbrace{2X^3 + 7X^2 + 6X - 5}_{\text{tiene a 1/2 como raíz}})$$

Dividimos entonces $2X^3 + 7X^2 + 6X - 5$ por $X - \frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2X^2 & +8X & +10 & \\
\hline
X-\frac{1}{2} & 2X^3+7X^2 & +6X & -5 & \\
 & -2X^3+X^2 & & & \\
\hline
 & 8X^2 & +6X & & \\
 & -8X^2 & +4X & & \\
\hline
 & & 10X & -5 & \\
 & & -10X & +5 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

de modo que

$$\begin{aligned} f &= \underbrace{(X^2-7)(X-\frac{1}{2})(2X^2+8X+10) = 2(X^2-7)(X-\frac{1}{2})\underbrace{(X^2+4X+5)}_{\text{sus raíces son } -2\pm i}}_{\text{factorización irreducible en } \mathbb{Q}[X]} \\ &= \underbrace{2(X-\sqrt{7})(X+\sqrt{7})(X-\frac{1}{2})(X^2+4X+5)}_{\text{factorización irreducible en } \mathbb{R}[X]} \\ &= \underbrace{2(X-\sqrt{7})(X+\sqrt{7})(X-\frac{1}{2})(X+2-i)(X+2+i)}_{\text{factorización irreducible en } \mathbb{C}[X]} \end{aligned}$$

Resolución del Ejercicio 5

> Hallar todos los pares de enteros $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que el polinomio
>
> $$f = X^{15} - X^{14} - 2aX^7 + 7aX^2 - X + 4b$$
>
> tiene una raíz racional múltiple.

Resolución
Buscamos los $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que f y f' tengan una raíz racional en común. Calculemos el polinomio derivado de f:

$$f' = 15X^{14} - 14X^{13} - 14aX^6 + 14aX - 1$$

Por el criterio de Gauss, los candidatos a raíces racionales de f son todos números enteros (porque su coeficiente principal es 1). Así, entre los candidatos a raíces racionales de f', solo tenemos que mirar a ± 1 (las otros candidatos a raíces racionales de f' no están en $\mathbb{Z}$)

Observando que 1 es raíz de f', cualquiera sea a, tenemos entonces 1 es raíz múltiple de f si y solo si

$$0 = f(1) = -2a + 7a - 1 + 4b \Longleftrightarrow 5a + 4b = 1 \underset{(1,-1)\text{ sol. particular}}{\Longleftrightarrow} (a, b) = (1, -1) + q(-4, 5),\ q \in \mathbb{Z}$$

Y por otra parte, -1 es raíz múltiple de f si y solo si

$$0 = f(-1) = -1 - 1 + 2a + 7a + 1 + 4b = 9a + 4b - 1$$
$$\text{y } 0 = f'(-1) = 15 + 14 - 14a - 14a - 1 = 28(1 - a)\ (\Longleftrightarrow a = 1)$$

, equivalentemente, $a = 1$ y $b = -2$. (observe que este par no es solución de la diofántica $5x + 4y = 1$, resuelta anteriormente)

Luego, el conjunto de pares $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que f tiene una raíz racional múltiple es

$$\{(1, -2)\} \cup \{(1 - 4q, -1 + 5q) : q \in \mathbb{Z}\}$$

3.2 2013, 1er cuatrimestre

Enunciados del parcial

1) Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a^{105} + 13 : 20) = 2$ y $(a^{214} - 19 : 15) = 5$. Calcular el resto de dividir a a por 60

2) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $-iz^8\overline{z}^4 + 81|z|^8 = 0$

3) Sea w una raíz sexta primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\sum_{k=0}^{5n+6} \Big(w^{15} + (\frac{1}{w})^7 + w + \overline{w^2} + \overline{w^{-25}} + \overline{w^{-2}} + w^{24} \Big)^k = 0$$

4) Factorizar el polinomio $f = X^6 - 4X^5 + 14X^4 - 24X^3 + 40X^2 - 32X + 32$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que sus raíces dobles son las mismas que las raíces dobles de $g = X^4 - 4X^3 + 12X^2 - 16X + 16$

Resolución del Ejercicio 1

> Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a^{105} + 13 : 20) = 2$ y $(a^{214} - 19 : 15) = 5$. Calcular el resto de dividir a a por 60

Resolución
Tenemos que $60 = 2^2 \times 3 \times 5$.
De la condición $(a^{105} + 13 : 5 \times 2^2) = 2$ sacamos que $2|a^{105} + 13$ (o sea, a es impar), $4 \not| a^{105} + 13$ y $5 \not| a^{105} + 13$. Tenemos que

$$4|a^{105} + 13 \iff a^{105} + 13 \equiv 0\ (4) \iff a^{105} \equiv \underbrace{-13}_{\equiv 3}\ (4) \underset{\substack{\text{Aplico Euler-Fermat} \\ (a \text{ es impar})}}{\iff} a \equiv 3\ (4)$$

de manera que

$$4 \not| a^{105+13} \iff a \not\equiv 3\ (4) \underset{a \text{ es impar}}{\iff} a \equiv 1\ (4)$$

Analicemos ahora módulo 5: de la condición de que $5|a^{214} - 19$, sacamos que a no es mùltiplo de 5. Así, tenemos que

$$5|a^{105} + 13 \iff a^{105} \equiv \underbrace{-13}_{\equiv 2}\ (5) \underset{\substack{\text{Aplico Fermat} \\ (5 \not| a)}}{\iff} a \equiv 2\ (5)$$

de manera que

$$5 \not| a^{105} + 13 \iff a \not\equiv 2\ (5) \underset{a \not\equiv 0\ (5)}{\iff} a \equiv 1, 3 \text{ o } 4\ (5)$$

Por otra parte, tenemos que

$$5|a^{214} - 19 \iff a^{214} \equiv \underbrace{19}_{\equiv 4}\ (5) \underset{\substack{\text{Aplico Fermat:} \\ 214 \equiv 2\ (4)}}{\iff} a^2 \equiv 4\ (5) \iff 5|a^2 - 4 = (a-2)(a+2)$$
$$\iff 5|a - 2 \text{ o } 5|a + 2 \iff a \equiv 2\ (5) \text{ o } a \equiv 3\ (5)$$

Concluimos que $a \equiv 3\ (5)$

Analicemos ahora módulo 3: si 3 no divide a a, tenemos las siguientes equivalencias:

$$3|a^{214} - 19 \iff a^{214} \equiv \underbrace{19}_{\equiv 1}\ (3) \underset{\substack{\text{Aplico Fermat:} \\ 214 \equiv 0\ (2)}}{\iff} 1 \equiv 1\ (3)$$

Pero nosotros queremos que $3 \not| a^{214} - 19$. Concluimos que $a \equiv 0\ (3)$.

Así, hemos obtenido el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{cases} a \equiv 1\ (4) \\ a \equiv 3\ (5) \\ a \equiv 0\ (3) \end{cases}$$

, que por el teorema chino del resto, tiene una única solución módulo $4 \times 5 \times 3 = 60$.
De la primera ecuación, sacamos que $a = 4q + 1$. Sustituyo en la segunda y obtengo

que $4q+1 \equiv 3\ (5)$, o sea, $4q \equiv 2\ (5)$, o sea (multiplicando por 4), $q \equiv 8\ (5)$, de modo que $q = 5k + 8$, y entonces $a = 4(5k + 8) + 1 = 20k + 33$. Sustituyo en la tercer ecuación y obtengo que

$$\underbrace{20}_{\equiv 2} k + \underbrace{33}_{\equiv 0} \equiv 0\ (3), \text{ o sea, } 2k \equiv 0\ (3)$$

de donde $k \equiv 0\ (3)$, y entonces $k = 3h$, de modo que

$$a = 20(3h) + 33 = 60h + 33$$

Luego, $r_{60}(a) = 33$.

Resolución del Ejercicio 2

Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $-iz^8\overline{z}^4 + 81|z|^8 = 0$

Resolución
Claramente, $z = 0$ es solución.
Supongamos pues que $z \neq 0$. Tenemos que

$$-iz^8\overline{z}^4 + 81|z|^8 = 0 \Longleftrightarrow 81|z|^8 = iz^8\overline{z}^4$$

Tomando módulo en esta igualdad, tenemos que $81|z|^8 = |z|^{12}$, de donde $|z|^4 = 81 = 3^4$, con lo cual $|z| = 3$. Tomando argumento, nos queda que

$$0 = \frac{\pi}{2} + 8\text{arg}(z) - 4\text{arg}(z) - 2k\pi \Longleftrightarrow 4\text{arg}(z) = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \text{arg}(z) = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

Veamos para cuáles k's esta cantidad está en $[0, 2\pi)$:

$$0 \leq \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} < 2\pi \Longleftrightarrow 0 \leq \frac{k}{2} - \frac{1}{8} < 2 \Longleftrightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{k}{2} < 2 + \frac{1}{8} \Longleftrightarrow k = 1 \text{ o } 2$$

Para $k = 1$, arg$(z) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$
Para $k = 2$, arg$(z) = \pi - \frac{\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$.

Luego, las soluciones de la ecuación son

$$0,\ 3e^{\frac{3\pi i}{8}},\ 3e^{\frac{7\pi i}{8}}$$

Resolución del Ejercicio 3

Sea w una raíz sexta primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\sum_{k=0}^{5n+6} \left(w^{15} + (\frac{1}{w})^7 + w + \overline{w^2} + \overline{w^{-25}} + \overline{w^{-2}} + w^{24}\right)^k = 0$$

Resolución
Llamemos S_n a dicha sumatoria.
Usando que $w^6 = 1$, reducimos exponentes módulo 6:

$$S_n = \sum_{k=0}^{5n+6} \Big(\underbrace{w^{15}}_{=w^3} + \underbrace{(\frac{1}{w})^7}_{=w^{-7}=w^5} + w + \underbrace{\overline{w^2}}_{=w^{-2}=w^4} + \underbrace{\overline{w^{-25}}}_{=w^{25}=w} + \underbrace{\overline{w^{-2}}}_{=w^2} + \underbrace{w^{24}}_{=1}\Big)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{5n+6} (w + \underbrace{\sum_{j=0}^{5} w^j}_{=\frac{w^6-1}{w-1}=0})^k = \sum_{k=0}^{5n+6} w^k = \frac{w^{5n+7}-1}{w-1} = \frac{w^{5n+1}\overbrace{w^6}^{=1}-1}{w-1} = \frac{w^{5n+1}-1}{w-1}$$

Tenemos así que

$$S_n = 0 \iff w^{5n+1} = 1 \underset{\operatorname{ord}(w)=6}{\iff} 6|5n+1 \iff 5n \equiv \underbrace{-1}_{\equiv 5} (6) \iff 6|5n-5 = 5(n-1)$$

$$\iff 6|n-1 \iff n \equiv 1\ (6)$$

Así, $\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\} = \{n \in \mathbb{N} : n \equiv 1\ (6)\}$.

Resolución del Ejercicio 4

Factorizar el polinomio $f = X^6 - 4X^5 + 14X^4 - 24X^3 + 40X^2 - 32X + 32$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que sus raíces dobles son las mismas que las raíces dobles de $g = X^4 - 4X^3 + 12X^2 - 16X + 16$

Resolución
Primeramente, computamos g':

$$g' = 4X^3 - 12X^2 + 24X - 16 = 4(\underbrace{X^3 - 3X^2 + 6X - 4}_{\text{su única raíz racional es 1}})$$

Dividamos $X^3 - 3X^2 + 6X - 4$ por $X - 1$, para calcular sus restantes raíces:

$$\begin{array}{r|l} & X^2 - 2X + 4 \\ \hline X - 1 & X^3 - 3X^2 + 6X - 4 \\ & -X^3 + X^2 \\ \hline & -2X^2 + 6X \\ & 2X^2 - 2X \\ \hline & 4X - 4 \\ & -4X + 4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

, de modo que

$$g' = 4(X-1)(X^2 - 2X + 4) = 4(X-1)(X - (1 + i\sqrt{3}))(X - (1 - i\sqrt{3}))$$

Claramente, 1 no es raíz de g. Por otra parte, como $g \in \mathbb{R}[X]$, tenemos que $1 + i\sqrt{3}$ o $1 - i\sqrt{3}$ es raíz de g si y solo si ambas son raíces de g, si y solo si $X^2 - 2X + 4|g$. Veamos si ocurre esto efectuando la correspondiente división:

$$\begin{array}{r|l} & X^2 - 2X + 4 \\ \hline X^2 - 2X + 4 & X^4 - 4X^3 + 12X^2 - 16X + 16 \\ & -X^4 + 2X^3 - 4X^2 \\ \hline & -2X^3 + 8X^2 - 16X \\ & 2X^3 - 4X^2 + 8X \\ \hline & 4X^2 - 8X + 16 \\ & -4X^2 + 8X - 16 \\ \hline & 0 \end{array}$$

, de manera que $g = (X^2 - 2X + 4)^2$. Así, por hipótesis tenemos que $g|f$. Efectuemos la división de f por g:

$$\begin{array}{r|l} & X^2 + 2 \\ \hline X^4 - 4X^3 + 12X^2 - 16X + 16 & X^6 - 4X^5 + 14X^4 - 24X^3 + 40X^2 - 32X + 32 \\ & -X^6 + 4X^5 - 12X^4 + 16X^3 - 16X^2 \\ \hline & 2X^4 - 8X^3 + 24X^2 - 32X + 32 \\ & -2X^4 + 8X^3 - 24X^2 + 32X - 32 \\ \hline & 0 \end{array}$$

de manera que

$$f = \underbrace{(X^2 - 2X + 4)^2(X^2 + 2)}_{\text{factorización en } \mathbb{Q}[X] \text{ y } \mathbb{R}[X]} = \underbrace{(X - (1 + \sqrt{3}i))(X - (1 - \sqrt{3}i))(X - \sqrt{2}i)(X + \sqrt{2}i)}_{\text{factorización en } \mathbb{C}[X]}$$

3.3 2015 A, 2do cuatrimestre

Enunciados del parcial

1) Si $a \in \mathbb{Z}$ satisface que $(7a^{103} + 18 : 132) = 33$, calcular el resto de dividir a a por 66

2) Sea $w \in G_{104}$ primitiva. Calcular $\Re(w^{52} + \sum_{i=0}^{25} w^{2i+1})$

3) a) Hallar un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo que cumpla simultáneamente que $\text{gr}((f : f')) = 2$, $1 + i$ es raíz de f y $X + 1 - \sqrt{5}$ divide a f

   b) Factorizar en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ el polinomio hallado en el ítem anterior.

4) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen $\overline{z}^4 + z^2(2 - 2i)|z| = 0$

Resolución del Ejercicio 1

> Si $a \in \mathbb{Z}$ satisface que $(7a^{103} + 18 : 132) = 33$, calcular el resto de dividir a a por 66

Resolución
Tenemos que

$$(7a^{103} + 18 : 3 \times 11 \times 2^2) = 3 \times 11$$

Como $3|7a^{103} + 18$ y $3|18$, se tiene que $3|a$, o sea, $a \equiv 0\ (3)$
Por otra parte, como $2 \not| 7a^{103} + 18$ y $2|18$, se tiene que a es impar, o sea, $a \equiv 1\ (2)$.
Ahora miramos módulo 11: como $11|7a^{103} + 18$, en particular a es coprimo con 11. Aplicando Fermat, obtenemos que

$$0 \equiv 7a^{103} + \underbrace{18}_{\equiv 7} \equiv 7(\underbrace{a^{10}}_{\equiv 1})^{10}a^3 + 7 = 7(a^3 + 1)\ (11)$$

de modo que $11|a^3 + 1$, esto es $a^3 \equiv 10\ (11)$. Miremos los cubos módulo 11:

$$\begin{aligned}
&1^3 \equiv 1,\ 2^3 = 8,\ 3^3 = 27 \equiv 5,\ 4^3 = 64 \equiv -2 \equiv 9,\ 5^3 = 25 \times 5 \equiv 3 \times 5 = 15 \equiv 4\\
&6^3 = 36 \times 6 \equiv 3 \times 6 = 18 \equiv 7,\ 7^3 = 49 \times 7 \equiv 5 \times 7 = 35 \equiv 2\\
&8^3 = 64 \times 8 \equiv (-2) \times 8 \equiv 9 \times 8 = 72 \equiv 6\\
&9^3 \equiv (-2)^3 = -8 \equiv 3,\ 10^3 \equiv (-1)^3 = -1 \equiv 10
\end{aligned}$$

de modo que $a \equiv 10\ (11)$. Así, nos queda el sistema de congruencias

$$\begin{cases} a \equiv 0\ (3) \\ a \equiv 1\ (2) \\ a \equiv 10\ (11) \end{cases}$$

(que por el teorema chino del resto, tiene una única solución módulo $3 \times 2 \times 11 = 66$)
De la primera ecuación, obtenemos que $a = 3q$. Sustituyo en la segunda y obtengo que $q \equiv 1\ (2)$, de modo que $q = 2k+1$, y entonces $a = 3(2k+1) = 6k+3$. Reemplazo en la tercera y obtengo que $6k+3 \equiv 10\ (11)$, de donde $6k \equiv 7\ (11)$. Como $2 \times 6 = 12 \equiv 1\ (11)$, multiplicando esta ecuación por 2, nos queda que $k \equiv 7 \times 2 = 14 \equiv 3\ (11)$, de modo que $k = 11h + 3$, y entonces

$$a = 6(11h + 3) + 3 = 66h + 21,\ \ h \in \mathbb{Z}$$

, es decir, $r_{66}(a) = 21$.

Resolución del Ejercicio 2

Sea $w \in G_{104}$ primitiva. Calcular $\Re(w^{52} + \sum\limits_{i=0}^{25} w^{2i+1})$

Resolución

Usando que $\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$, para $z = w^{52} + \sum\limits_{i=0}^{25} w^{2i+1}$, tenemos que

$$\Re(z) = \frac{1}{2}\Big[w^{52} + \sum_{i=0}^{25} w^{2i+1} + w^{-52} + \sum_{i=0}^{25} w^{-2i-1}\Big]$$

Como $1 = w^{104} = (w^{52})^2$ y $w^{52} \neq 1$, entonces $w^{52} = -1$, de modo que nos queda que

$$\Re(z) = -1 + \frac{1}{2}\Big[\sum_{i=0}^{25} w^{2i+1} + \sum_{i=0}^{25} w^{-2i-1}\Big]$$

Miremos las sumatorias:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{25} w^{2i+1} &= w + w^3 + w^5 + \cdots + w^{47} + w^{49} + w^{51} \\ \sum_{i=0}^{25} w^{-2i-1} &= w^{-1} + w^{-3} + w^{-5} + \cdots + w^{-47} + w^{-49} + w^{-51} \\ &= w^{103} + w^{101} + w^{99} + \cdots + w^{57} + w^{55} + w^{53}\end{aligned}$$

de manera que al sumar ambas sumatorias, tenemos todas las potencias impares de w, desde 1 hasta 103:

$$\sum_{i=0}^{25} w^{2i+1} + \sum_{i=0}^{25} w^{-2i-1} = \sum_{i=0}^{51} w^{2i+1} = w\sum_{i=0}^{51}(w^2)^i = w\frac{((w^2)^{52}-1)}{w^2-1} = w\frac{(w^{104}-1)}{w^2-1} = 0$$

Por ende, nos queda que $\Re(z) = -1$.

Resolución del Ejercicio 3

a) Hallar un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo que cumpla simultáneamente que $\mathrm{gr}((f : f')) = 2$, $1 + i$ es raíz de f y $X + 1 - \sqrt{5}$ divide a f

b) Factorizar en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ el polinomio hallado en el ítem anterior.

Resolución
Como $1 + i$ debe ser raíz de $f \in \mathbb{R}[X]$, se tiene que $1 - i$ es raíz de f (con lo cual $X^2 - 2X + 2$ divide a f)
Como $-1 + \sqrt{5}$ debe ser raíz de $f \in \mathbb{Q}[X]$, tenemos que $-1 - \sqrt{5}$ es raíz de f (con lo cual $X^2 + 2X - 4$ divide a f)
Además, f y f' deben tener dos raíces complejas en común. El polinomio (de grado 6)

$$f = (X^2 - 2X + 2)^2(X^2 + 2X - 4)$$

es polinomio de grado mínimo que cumple con las condiciones requeridas (también podemos tomar $f = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X - 4)^2$)

Con la elección anterior de f, tenemos que

$$\begin{aligned} f &= \underbrace{(X^2 - 2X + 2)^2(X^2 + 2X - 4)}_{\text{factorización en } \mathbb{Q}[X]} \\ &= \underbrace{(X^2 - 2X + 2)^2(X - 1 + \sqrt{5})(X - 1 - \sqrt{5})}_{\text{factorización en } \mathbb{R}[X]} \\ &= \underbrace{(X - 1 - i)(X - 1 + i)(X - 1 + \sqrt{5})(X - 1 - \sqrt{5})}_{\text{factorización en } \mathbb{C}[X]} \end{aligned}$$

Resolución del Ejercicio 4

Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen $\overline{z}^4 + z^2(2-2i)|z| = 0$

Resolución
Claramente, $z = 0$ verifica la ecuación. Para $z \neq 0$, tenemos que

$$\overline{z}^4 + z^2(2-2i)|z| = 0 \Longleftrightarrow \overline{z}^4 = -z^2(2-2i)|z|$$

Tomando módulo en esta ecuación, se obtiene que $|z|^4 = |z|^3\sqrt{8}$, de donde $|z| = \sqrt{8}$. Tomando argumento, se tiene que $-4\arg(z) = \pi + 2\arg(z) + \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$, equivalentemente,

$$-6\arg(z) = \frac{11\pi}{4} + 2k\pi \Longleftrightarrow \arg(z) = -\frac{k\pi}{3} - \frac{11\pi}{24}$$

Veamos para cuáles k's esta cantidad está en $[0, 2\pi)$:

$$\begin{aligned} 0 \leq -\frac{k\pi}{3} - \frac{11\pi}{24} < 2\pi \Longleftrightarrow -2 < \frac{11}{24} + \frac{k}{3} \leq 0 &\Longleftrightarrow 3 \times (-2 - \frac{11}{24}) < k \leq 3 \times (-\frac{11}{24}) \\ &\Longleftrightarrow (-3) \times (\frac{59}{24}) < k \leq \frac{-33}{24} \Longleftrightarrow \frac{-177}{24} < k \leq \frac{-33}{24} \\ &\Longleftrightarrow \frac{24 \times (-8) + 15}{24} < k \leq \frac{24 \times (-2) + 15}{24} \\ &\Longleftrightarrow -8 + \frac{15}{24} < k \leq -2 + \frac{15}{24} \\ &\Longleftrightarrow -7 \leq k \leq -2 \end{aligned}$$

Escribiendo $-\frac{k\pi}{3} - \frac{11\pi}{24} = \frac{8(-k)\pi}{24} - \frac{11\pi}{24}$ (a fin de calcular esta suma rápidamente para cada k), tenemos que las soluciones de la ecuación son:

$$0,\ \sqrt{8}e^{\frac{5\pi i}{24}},\ \sqrt{8}e^{\frac{13\pi i}{24}},\ \sqrt{8}e^{\frac{21\pi i}{24}},\ \sqrt{8}e^{\frac{29\pi i}{24}},\ \sqrt{8}e^{\frac{37\pi i}{24}},\ \sqrt{8}e^{\frac{45\pi i}{24}}$$

3.4 2015 B, 2do cuatrimestre

Enunciados del parcial

1) Hallar todos los primos p tales que p divide a $3^{p+1} + 5^{p-1} + 1$
2) Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $P(X) = X^6 - 24X^3 + a$ tenga raíces múltiples. Para cada valor de a hallado, factorizar $P(X)$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$
3) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(-2\sqrt{3} + 2i)^n = 2^{2n-1}(1 - \sqrt{3}i)$
4) Calcular el resto de dividir por 119 a 13^{73}
5) Sea $\xi_{19} \in G_{19}$ una raíz primitiva de la unidad. Hallar $\Re(\sum\limits_{k=1}^{9} \xi_{19}^{k^2})$.

Resolución del Ejercicio 1

Hallar todos los primos p tales que p divide a $3^{p+1} + 5^{p-1} + 1$

Resolución

Por un cálculo directo, vemos que $p = 5$ cumple con la condición dada. Para $p \neq 5$, tenemos por el pequeño teorema de Fermat que, módulo p

$$\underbrace{3^{p+1}}_{=3^p 3 \equiv 3\times 3=9} + \underbrace{5^{p-1}}_{\equiv 1} + 1 \equiv 11\ (p)$$

que es congruente a 0 si y solo si $p = 11$.
Luego, los primos buscados son $p_1 = 5$ y $p_2 = 11$.

Resolución del Ejercicio 2

> Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $P_a(X) = X^6 - 24X^3 + a$ tenga raíces múltiples. Para cada valor de a hallado, factorizar $P_a(X)$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$

Resolución
Computemos P':

$$P'_a(X) = 6X^5 - 72X^2 = 6X^2(X^3 - 12)$$

Así, el conjunto de las raíces de P'_a es $\{0\} \cup \sqrt[3]{12}G_3$
Tenemos que 0 es raíz de P_a si y solo si $a = 0$. Para $a = 0$, se tiene que

$$P_0(X) = X^6 - 24X^3 = \underbrace{X^3(X^3 - 24)}_{\text{factorización en } \mathbb{Q}[X]} = \underbrace{X^3(X - 2\sqrt[3]{3})(X - 2\sqrt[3]{3}w)(X - 2\sqrt[3]{3}\overline{w})}_{\text{factorización en } \mathbb{C}[X]}$$
$$= \underbrace{X^3(X - 2\sqrt[3]{3})(X^2 + 2\sqrt[3]{3}X + 4\sqrt[3]{9})}_{\text{factorización en } \mathbb{R}[X]}$$

, donde w es cualquiera de las raíces primitivas de G_3.

Para $a \neq 0$: dado $z_0 \in G_3$, tenemos que $\sqrt[3]{12}z_0$ es raíz de P_a si y solo si

$$0 = P_a(\sqrt[3]{12}z_0) = ((\sqrt[3]{12}z_0)^3)^2 - 24(\sqrt[3]{12}z_0)^3 + a = 12^{12} - 24 \times 12 + a = -12^2 + a$$

, si y solo si $a = 12^2 = 144$.
En palabras: para $a \neq 0$, P_a tiene una raíz múltiple si y solo si $a = 144$. (en cuyo caso, todos los elementos de $\sqrt[3]{12}G_3$ son raíces múltiples de P_a, que por tener grado 6, son todas dobles). Nos queda en este caso que

$$P_{144}(X) = \underbrace{(X^3 - 12)^2}_{\text{factorización en } \mathbb{Q}[X]} = \underbrace{(X - \sqrt[3]{12})^2(X - \sqrt[3]{12}w)^2(X - \sqrt[3]{12}\overline{w})^2}_{\text{factorización en } \mathbb{C}[X]}$$
$$= \underbrace{(X - \sqrt[3]{12})^2(X^2 + \sqrt[3]{12}X - \sqrt[3]{12^2})^2}_{\text{factorización en } \mathbb{R}[X]}$$

Resolución del Ejercicio 3

Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(-2\sqrt{3}+2i)^n = 2^{2n-1}(1-\sqrt{3}i)$

Resolución
Tenemos que

$$(-2\sqrt{3}+2i)^n = 2^{2n-1}(1-\sqrt{3}i) \iff 2^n(-\sqrt{3}+i)^n = 2^{2n-1}(1-\sqrt{3}i)$$

$$\iff (i-\sqrt{3})^n = 2^{n-1}(1-\sqrt{3}i) \iff i^n(1+\sqrt{3}i)^n = 2^n(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

$$\iff i^n(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^n = (\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i) \underset{\substack{\text{Multiplicando por} \\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{\frac{i\pi}{3}}=e^{\frac{2\pi i}{6}}\in G_6}}{\iff} \underbrace{i^n(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{n+1}}_{\text{tiene módulo 1 } \forall\ n} = 1$$

$$\iff n\frac{\pi}{2}+(n+1)\frac{\pi}{3} = 0+2k\pi \iff \frac{5n+2}{6} = 2k \iff 5n+2 = 12k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff 12|5n+2 \iff 5n \equiv \underbrace{-2}_{\equiv 10}\ (12) \iff 12|5n-10 = 5(n-2) \iff 12|n-2 \iff n \equiv 2\ (12)$$

Resolución del Ejercicio 4

> Calcular el resto de dividir por 119 a 13^{73}

Resolución
Tenemos que $119 = 7 \times 17$. Módulo 7, tenemos que

$$13^{73} \equiv (-1)^{73} = -1 \equiv 6 \ (7)$$

Módulo 17, aplicamos el pequeño teorema de Fermat, dividiendo el exponente por $17 - 1 = 16$:

$$13^{73} = 13^{16\times 4+9} = (\underbrace{13^{16}}_{\equiv 1})^4 13^9 \equiv (\underbrace{13}_{\equiv -4})^9 \equiv (-4)^9 = -(\underbrace{4^2}_{\equiv -1})^4 4 \equiv -4 \equiv 13 \ (17)$$

Así, llamando $a = 13^{73}$, hemos obtenido el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{cases} a \equiv 6 \ (7) \\ a \equiv 13 \ (17) \end{cases}$$

, que por el teorema chino del resto admite una única solución módulo $7 \times 17 = 119$. De la primera ecuación, sacamos que $a = 7q + 6$. Sustituyo en la segunda y obtengo que $7q + 6 \equiv 13 \ (17)$, equivalentemente, $7q \equiv 7 \ (17)$, o sea que $17|7q - 7 = 7(q - 1)$, con lo cual $17|q - 1$, es decir, $q \equiv 1 \ (17)$, de modo que $q = 17k + 1$, y entonces

$$a = 7q + 6 = 7(17k + 1) + 6 = 119k + 13$$

Luego, $r_{119}(13^{73}) = 13$

Resolución del Ejercicio 5

Sea $\xi_{19} \in G_{19}$ una raíz primitiva de la unidad (como 19 es primo, esto es equivalente a decir que $\xi_{19} \in G_{19} \setminus \{1\}$). Hallar $\Re(\sum_{k=1}^{9} \xi_{19}^{k^2})$

Resolución
Usando que $\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, tenemos que

$$\Re(\sum_{k=1}^{9} \xi_{19}^{k^2}) = \frac{1}{2}\Big[\sum_{k=1}^{9} \xi_{19}^{k^2} + \sum_{k=1}^{19} \xi_{19}^{-k^2}\Big]$$

Veremos que al reducir módulo 19 cada uno de los elementos del conjunto (de 18 elementos) $\{\pm k^2 : 1 \leq k \leq 9\}$, obtenemos todos los restos módulo 19 (salvo el 0).
Pues bien,

$\{k^2 : 1 \leq k \leq 9\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$
Al reducir cada uno de estos elementos módulo 19, nos da los siguientes restos distintos
$\{1, 4, 9, 16, 6, 17, 11, 7, 5\} \underset{\text{reordeno}}{=} \{1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17\}$

Ahora, usando que $-k^2 \equiv 19 - k^2 \ (19)$, al reducir cada uno de los elementos de $\{-k^2 : 1 \leq k \leq 9\}$ módulo 19, obtenemos los siguientes restos todos distintos:

$$\{18, 15, 14, 13, 12, 10, 8, 3, 2\} \underset{\text{reordeno}}{=} \{2, 3, 5, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 18\}$$

Así que efectivamente, al reducir $\{\pm k^2 ; 1 \leq k \leq 9\}$ módulo 19, obtenemos todos los restos módulo 19, salvo el 0. Por lo tanto, nos queda que

$$\Re(\sum_{k=1}^{9} \xi_{19}^{k^2}) = \frac{1}{2}\Big[-1 + \underbrace{\sum_{j=0}^{18} \xi_{19}^{j}}_{\frac{(\xi_{19})^{19}-1}{\xi_{19}-1}=0}\Big] = -\frac{1}{2}$$

3.5 2016, 1er cuatrimestre

Enunciados del parcial

1) Hallar todos los primos positivos p tales que $p^3 | 35^{p^2} + 21^{p-1} + 14!p$

2) Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(28a^{321} + 2^{2016} : 77) \neq 1$ y existe $b \in \mathbb{Z}$ tal que $10a + 15b = 5$.

3) Sea w una raíz 18-ava primitiva de la unidad. Determinar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que $w^n = i^{n(n+1)}$

4) Determinar todos los $a \in \mathbb{Q}$ para los cuales el polinomio $f = X^5 + X^4 - aX^3 - 5X^2 + 6$ es divisible por $X^2 - a$. Para cada valor de a hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$

5) Determinar todos los $f \in \mathbb{Q}[X]$ mónicos de grado 5 que satisfacen simúltaneamente:
   - $(f : f')$ tiene grado 2
   - $1 + 2i$ es raíz de f
   - $f(1) = \frac{1}{2}$

   Para cada uno de los polinomios hallados, factorizarlo en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

Resolución del Ejercicio 1

Hallar todos los primos positivos p tales que $p^3 \| 35^{p^2} + 21^{p-1} + 14!p$

Resolución
Claramente, $p = 7$ cumple con tal condición. Por otra parte, $p = 3$ no cumple con esa condición, pues en tal caso, como 3 divide a $14! \times 3$ y $3 \mid 21^2$, tendríamos que $3 \mid 35^{3^2}$, lo cual no ocurre.
Sea ahora un primo $p \neq 7$ que cumple con dicha condición (por lo recién visto, tenemos que $p \neq 3$). En particular, por transitividad tenemos que $p \mid 35^{p^2} + 21^{p-1} + 14!p$. Aplicando el pequeño teorema de Fermat, tenemos que

$$0 \equiv \underbrace{35^{p^2}}_{=(35^p)^p \equiv 35^p \equiv 35} + \underbrace{21^{p-1}}_{\equiv 1} + \underbrace{14!p}_{\equiv 0} \ (p) \Longleftrightarrow 36 \equiv 0 \ (p) \Longleftrightarrow p = 2$$

Veamos si efectivamente $2^3 \mid 35^4 + 21 + 14! \times 2$:

$$\underbrace{35^4}_{\equiv 3^4 = 81 \equiv 1 \ (8)} + \underbrace{21}_{\equiv 5 \ (8)} + \underbrace{14! \times 2}_{\equiv 0 \ (8)} \equiv 6 \ (8)$$

Por consiguiente, el único primo positivo que cumple con la condición del enunciado es $p = 7$.

Resolución del Ejercicio 2

> Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(28a^{321} + 2^{2016} : 77) \neq 1$ y existe $b \in \mathbb{Z}$ tal que $10a + 15b = 5$

Resolución
Expresemos la segunda condición de una forma más conveniente:

Existe $b \in \mathbb{Z}$ tal que $10a + 15b = 5 \iff 15|5 - 10a \iff 3|1 - 2a \iff 2a \equiv 1\ (3) \underset{2\times 2\equiv 1\ (3)}{\iff} a \equiv 2\ (3)$

Ahora, como $77 = 7 \times 11$, y 7 no divide a $28a^{321} + 2^{2016}$, la primera condición del enunciado es equivalente a que $11|28a^{321}+2^{2016}$ (para lo cual, una condición necesaria es que 11 no divida a a). Usando que $2016 \equiv 6\ (10)$ y aplicando Fermat para reducir 2^{2016} módulo 11, nos queda que $2^{2016} \equiv 2^6 \equiv 64 \equiv 9\ (11)$. Y por otra parte, como $321 \equiv 1\ (10)$, nos queda que $a^{321} \equiv a\ (11)$. Luego,

$$(28a^{321} + 2^{2016} : 77) \neq 1 \iff \underbrace{28}_{\equiv 6}\underbrace{a^{321}}_{\equiv a} + \underbrace{2^{2016}}_{\equiv 9} \equiv 0\ (11) \iff 11|6a + 9 = 3(2a + 3)$$
$$\iff 11|2a + 3 \iff 2a \equiv \underbrace{-3}_{\equiv 8}\ (11) \underset{6\times 2\equiv 1\ (11)}{\iff} a \equiv \underbrace{6 \times 8}_{=48\equiv 4}\ (11)$$

En definitiva, los $a \in \mathbb{Z}$ que cumplen con las condiciones del enunciado son las soluciones del siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{cases} a \equiv 2\ (3) \\ a \equiv 4\ (11) \end{cases}$$

De la primera ecuación, sacamos que $a = 3q + 2$. Sustituimos en la segunda y obtenemos que $3q + 2 \equiv 4\ (11)$, o sea, $3q \equiv 2\ (11)$, equivalentemente (multiplicando por 4, que nos sirve pues $4 \times 3 \equiv 1\ (11)$), $q \equiv 8\ (11)$, de modo que $q = 11k + 8$, y entonces

$$a = 3q + 2 = 3(11k + 8) + 2 = 33k + 26,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Luego, el conjunto solución a nuestro problema es $\{a \in \mathbb{Z} : a \equiv 26\ (33)\}$

Resolución del Ejercicio 3

Sea w una raíz 18-ava primitiva de la unidad. Determinar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que $w^n = i^{n(n+1)}$

Resolución
Como w es raíz 18-ava primitiva y $18 = 9 \times 2$ (con 9 y 2 coprimos), tenemos que $w = -\xi$, con ξ alguna raíz primitiva de G_9. También, como ξ es primitiva de G_9 e i es primitiva de G_4, y 9 y 4 son coprimos, tenemos que $i\xi$ es primitiva de $G_{9\times 4} = G_{36}$. Tenemos que

$$w^n = i^{n(n+1)} \iff (-\xi)^n = i^{n^2} i^n \iff (i\xi)^n = i^{n^2}$$

Si n es par, entonces $n^2 \equiv 0\ (4)$, con lo cual $i^{n^2} = 1$, y lo anterior es equivalente a que $(i\xi)^n = 1$, equivalentemente (por ser $i\xi$ primitiva de G_{36}), $n \equiv 0\ (36)$.
Si n es impar, entonces $n^2 \equiv 1\ (4)$, con lo cual $i^{n^2} = i$, y tenemos así que

$$(i\xi)^n = \underbrace{i^{n^2}}_{=i} \iff (i\xi)^n = i$$

Si $n \equiv 1\ (4)$, esto equivale a que $\xi^n = 1$, que equivale (por ser ξ primitiva de G_9) a que $9|n$.
Ahora, si existiera un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \equiv 3\ (4)$ y que cumpla con la condición del enunciado, entonces $-i\xi^n = i$, equivalentemente, $\xi^n = -1$, que implica que 9 no divide a n, y $\xi^{2n} = 1$, que a su vez implica que 9 no divide a n y $9|2n$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, no existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \equiv 3\ (4)$ y que cumpla con la condición del enunciado.

En definitiva, el conjunto solución a nuestro problema es la siguiente unión disjunta:

$$\Big\{n \in \mathbb{Z} : n \equiv 0\ (36)\Big\} \cup \Big\{n \in \mathbb{Z} : \begin{cases} n \equiv 1\ (4) \\ n \equiv 0\ (9) \end{cases} \Big\}$$

Resolvamos el sistema del segundo conjunto de esta unión: de la primera ecuación, sacamos que $n = 4q + 1$. Sustituimos en la segunda y obtenemos que $4q + 1 \equiv 0\ (9)$, equivalentemente, $4q \equiv 8\ (9)$, o sea, $9|4q - 8 = 4(q - 2)$, o sea, $q \equiv 2\ (9)$, de modo que $q = 9k + 2$, y entonces

$$n = 4(9k + 2) + 1 = 36k + 9,\ k \in \mathbb{Z}$$

Luego, el conjunto solución a nuestro problema es $\{n \in \mathbb{Z} : n \equiv 0\ (36)$ o $n \equiv 9\ (36)\}$.

Veamos otra posible resolución (mas elemental): como w es raíz 18-ava primitiva de la unidad, tenemos que $\arg(w) = \frac{2j\pi}{18} = \frac{j\pi}{9}$ para cierto $1 \leq j < 18$ coprimo con 18.

Teniendo en cuenta que $|w|^n = |i^{n(n+1)}| = 1$ para cualquier n, tenemos que

$$w^n = i^{n(n+1)} \iff \exists\ k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } n.\arg(w) = n(n+1)\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{=\arg(i)} + 2k\pi$$

$$\iff \exists\ k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } n\frac{j\cancel{\pi}}{9} = n(n+1)\frac{\cancel{\pi}}{2} + 2k\cancel{\pi}$$

$$\iff \exists\ k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } 2nj = 9n(n+1) + 36k$$

$$\iff \exists\ k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } n(2j-9) - 9n^2 = 36k$$

$$\iff 36|n(2j-9) - 9n^2$$

$$\iff 9|n(2j-9) - 9n^2 \text{ y } 4|n(2j-9) - 9n^2$$

$$\iff \underbrace{-9n^2}_{\equiv 0} + n(2j - \underbrace{9}_{\equiv 0}) \equiv 0 \ (\bmod 9) \text{ y } n(2j - \underbrace{9}_{\equiv 1}) - \underbrace{9}_{\equiv 1} n^2 \equiv 0 \ (\bmod 4)$$

$$\iff 2nj \equiv 0 \ (\bmod 9) \text{ y } n(2j-1) - n^2 \equiv 0 \ (\bmod 4)$$

$$\iff 2jn \equiv 0 \ (\bmod 9) \text{ y } n(\underbrace{2j}_{\equiv 2} - 1 - n) \equiv 0 \ (\bmod 4)$$

$$\underset{\text{9 es coprimo con 2 y } j}{\iff} n \equiv 0 \ (\bmod 9) \text{ y } 4|\underbrace{n(n-1)}_{\substack{\text{uno es par} \\ \text{y el otro impar}}}$$

$$\iff n \equiv 0 \ (\bmod 9) \text{ y } (4|n \text{ o } 4|n-1)$$

$$\iff n \equiv 0 \ (\bmod 9) \text{ y } (n \equiv 0 \ (\bmod 4) \text{ o } n \equiv 1 \ (\bmod 4))$$

$$\iff \underbrace{\begin{cases} n \equiv 0 \ (\bmod 9) \\ n \equiv 0 \ (\bmod 4) \end{cases}}_{(\iff n \equiv 0 \ (\bmod 36))} \text{ o } \underbrace{\begin{cases} n \equiv 0 \ (\bmod 9) \\ n \equiv 1 \ (\bmod 4) \end{cases}}_{(\iff n \equiv 9 \ (\bmod 36))}$$

$$\iff n \equiv 0 \ (\bmod 36) \text{ o } n \equiv 9 \ (\bmod 36)$$

, tal como habíamos hallado en la primer resolución.

Resolución del Ejercicio 4

Determinar todos los $a \in \mathbb{Q}$ para los cuales el polinomio $f = X^5 + X^4 - aX^3 - 5X^2 + 6$ es divisible por $X^2 - a$. Para cada valor de a hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$

Resolución
f es divisible por $X^2 - a$ si y solo si $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$ son raíces de f, si y solo si

$$\begin{aligned} 0 &= f(\sqrt{a}) = \cancel{a^2\sqrt{a}} + a^2 \cancel{- a^2\sqrt{a}} - 5a + 6 \\ \text{y } 0 &= f(-\sqrt{a}) = \cancel{-a^2\sqrt{a}} + a^2 + \cancel{a^2\sqrt{a}} - 5a + 6 \end{aligned}$$

, si y solo si $a^2 - 5a + 6 = 0$, si y solo si $a = 3$ o $a = 2$.

Para $a = 2$: efectuemos la división de f por $X^2 - 2$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & X^3 & +X^2 & -3 & & \\ \hline X^2-2 & X^5 + X^4 & -2X^3 & -5X^2 & +6 & \\ & -X^5 & +2X^3 & & & \\ \hline & X^4 & & -5X^2 & & \\ & -X^4 & & +2X^2 & & \\ \hline & & & -3X^2 & +6 & \\ & & & 3X^2 & -6 & \\ \hline & & & & 0 & \end{array}$$

de manera que $f = (X^2 - 2)(X^3 + X^2 - 3)$. Ahora, observe que $X^3 + X^2 - 3$ es un polinomio de grado 3 sin raíces racionales, con lo cual es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$. Luego, $f = (X^2 - 2)(X^3 + X^2 - 3)$ es la factorización irreducible de f en $\mathbb{Q}[X]$.

Para $a = 3$: Efectuemos la división de f por $X^2 - 3$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & X^3 & +X^2 & -2 & & \\ \hline X^2-3 & X^5 + X^4 & -3X^3 & -5X^2 & +6 & \\ & -X^5 & +3X^3 & & & \\ \hline & X^4 & & -5X^2 & & \\ & -X^4 & & +3X^2 & & \\ \hline & & & -2X^2 & +6 & \\ & & & 2X^2 & -6 & \\ \hline & & & & 0 & \end{array}$$

, de manera que $f = (X^2 - 3)(X^3 + X^2 - 2)$. Ahora, observemos que $X^3 + X^2 - 2$ tiene a 1 como (única) raíz racional. Efectuando la división de $X^3 + X^2 - 2$ por $X - 1$, tenemos

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & X^2 & +2X & +2 \\ \cline{2-5}
X-1 \big) & X^3 & +X^2 & & -2 \\
 & -X^3 & +X^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & 2X^2 & & \\
 & & -2X^2 & +2X & \\ \cline{3-4}
 & & & 2X & -2 \\
 & & & -2X & +2 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

Luego, $f = (X^2 - 3)(X - 1)(X^2 + 2X + 2)$, y ésta es la factorización irreducible de f en $\mathbb{Q}[X]$.

Resolución del Ejercicio 5

Determinar todos los $f \in \mathbb{Q}[X]$ mónicos de grado 5 que satisfacen simúltaneamente:
- $(f : f')$ tiene grado 2
- $1 + 2i$ es raíz de f
- $f(1) = \frac{1}{2}$

Para cada uno de los polinomios hallados, factorizarlo en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

Resolución

Claramente $1+2i$ no puede ser raíz de multiplicidad $k \geq 3$ de f, pues en tal caso $1+2i$ y $1-2i$ serían raíces de multiplicidad $k \geq 3$ de f, con lo cual f sería divisible por un polinomio de grado $2k \geq 6$, lo cual no es posible si $\text{gr}(f) = 5$.

Por ende, las multiplicidades de $1 \pm 2i$ como raíces de f son ambas 1, o ambas 2.

Si $\text{mult}(1 \pm 2i, f) = 2$: en este caso, f es divisible por $(X^2 - 2X + 5)^2$ (donde por supuesto, $X^2 - 2X + 5 = (X - (1 + 2i))(X - (1 - 2i)))$, que tiene grado 4, con lo cual

$$f = (X^2 - 2X + 5)^2(X - a),\ a \in \mathbb{Q}$$

Queremos que $\frac{1}{2} = f(1) = -16 \times (a - 1)$, equivalentemente, $a = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$. Luego, en este caso, el único polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ que cumple con las condiciones dadas es

$$f = \underbrace{(X^2 - 2X + 5)^2(X - \frac{31}{32})}_{\text{factorización irreducible en } \mathbb{Q}[X] \text{ y } \mathbb{R}[X]} = \underbrace{(X - (1 + 2i))^2(X - (1 - 2i))^2(X - \frac{31}{32})}_{\text{factorización irreducible en } \mathbb{C}[X]}$$

(donde $(f : f')$ tiene grado 2, porque las dos raíces múltiples de f son $1 + 2i$ y $1 - 2i$, que son dobles)

$\text{mult}(1 \pm 2i, f) = 1$: En este caso, $f = (X^2 - 2X + 5)p$, donde $p \in \mathbb{Q}[X]$ es mónico de grado 3 y no se anula en $1 \pm 2i$. Necesitamos que $(f : f')$ tenga grado 2. Claro está que para ello, p debe tener una raíz múltiple. Notar que p no puede tener una raíz compleja doble z_0, pues en tal caso, z_0 sería la única raíz múltiple (y doble) de f, y entonces $(f : f')$ no tendría grado 2 (sería igual a $X - z_0$). Por lo tanto, $p = (X - a)^3$, con $a \in \mathbb{Q}$. Así, se cumple que $(f : f')$ tiene grado 2 (de hecho, $(f : f') = (X - a)^2$), y

$$\frac{1}{2} = f(1) = 4p(1) = 4(1 - a)^3 \iff (a - 1)^3 = -\frac{1}{8} \iff a - 1 = -\frac{1}{2} \iff a = \frac{1}{2}$$

y nos queda así que

$$f = \underbrace{(X^2 - 2X + 5)(X - \frac{1}{2})^3}_{\text{factorización irreducible en } \mathbb{Q}[X] \text{ y } \mathbb{R}[X]} = \underbrace{(X - (1 + 2i))(X - (1 - 2i))(X - \frac{1}{2})^3}_{\text{factorización irreducible en } \mathbb{C}[X]}$$

3.6 2017, 2do cuatrimestre

1) Hallar todos los divisores positivos de 49^{50} que sean congruentes a 28 módulo 55

2) Hallar todos los primos positivos p tales que

$$3^{p^2+3} \equiv 16\ (p) \text{ y } (13p+1)^{131} \equiv 6\ (p)$$

3) Sea $w \in G_{15}$ primitiva. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $\sum\limits_{i=4}^{2n} \overline{w}^{3i} = 0$

3) Hallar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{(2-2i)^{11n+2}}{1+i}$ es un número real negativo.

4) Hallar todos los polinomios mónicos $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado 6 que satisfacen simultáneamente:
- $(f : f') \neq 1$
- $(X - \sqrt{3})(X - i)$ divide a f en $\mathbb{C}[X]$
- $f(2) = 5$

Factorizar en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ cada uno de los polinomios hallados.

Resolución del Ejercicio 1

$49^{50} = (7^2)^{50} = 7^{100}$, cuyo conjunto de divisores positivos es $\{7^n : 0 \le n \le 100\}$. Debemos determinar los naturales $0 \le n \le 100$ tales que $7^n \equiv 28\ (55)$. Tenemos que

$$7^n \equiv 28\ (55) \iff \underbrace{55}_{=5\cdot 11} | 7^n - 28 \underset{\substack{5 \text{ y } 11 \\ \text{son coprimos}}}{\iff} 5|7^n - 28 \text{ y } 11|7^n - 28 \iff \begin{cases} 7^n \equiv \underbrace{28}_{\equiv 3}\ (5) \\ 7^n \equiv \underbrace{28}_{\equiv 6}\ (11) \end{cases}$$

Para continuar, aplicamos el pequeño teorema de Fermat: en la congruencia módulo 5, dividimos a n por 4, y en la congruencia módulo 11, dividimos a n por 10. Concretamente, llamando $r_n = r_4(n)$ y $s_n = r_{10}(n)$, nos queda que

$$\begin{cases} 7^n \equiv 3\ (5) \\ 7^n \equiv 6\ (11) \end{cases} \iff \begin{cases} 7^{r_n} \equiv 3\ (5) \\ 7^{s_n} \equiv 6\ (11) \end{cases} \underset{\substack{7\equiv 2\ (5) \\ 7 \equiv -4\ (11)}}{\iff} \begin{cases} 2^{r_n} \equiv 3\ (5) \\ (-4)^{s_n} \equiv 6\ (11) \end{cases} \underset{\text{Por exhaución}}{\iff} r_n = 3 \text{ y } s_n = 7$$

$$\iff \begin{cases} n \equiv \underbrace{3}_{\equiv 7}\ (4) \\ n \equiv 7\ (10) \end{cases} \iff 5|n-7 \text{ y } 4|n-7 \iff \begin{cases} n \equiv \underbrace{7}_{\equiv 3}\ (4) \\ n \equiv \underbrace{7}_{\equiv 2}\ (5) \end{cases} \iff \begin{cases} n \equiv 3\ (4) \\ n \equiv 2\ (5) \end{cases}$$

$$\iff n \equiv 7\ (20) \iff n = 20q + 7,\ q \in \mathbb{N}_0$$

Ahora, resta determinar los $q \in \mathbb{Z}$ tales que $0 \le 20q + 7 \le 100$:

$$0 \le 20q + 7 \le 100 \iff -7 \le 20q \le 93 \iff -\frac{7}{20} \le q \le 4 + \frac{13}{20} \iff 0 \le q \le 4$$

Para cada uno de estos q, obtenemos el n correspondiente. Luego, el conjunto de divisores buscados es

$$\{7^7, 7^{27}, 7^{47}, 7^{67}, 7^{87}\}$$

Resolución del Ejercicio 2

Por Fermat, $3^p \equiv 3\ (p)$, de modo que $3^{p^2+3} = \underbrace{(\underbrace{3^p}_{\equiv 3})^p}_{\equiv 3^p \equiv 3} \cdot 3^3 \equiv 3^4\ (p)$, de modo que la primer condición del enunciado equivale a que p divida a $81 - 16 = 65 = 13 \cdot 5$, esto es, a que $p = 5$ o 13.

Por otra parte, como $13p \equiv 0\ (p)$, la segunda condición del enunciado equivale a que $11^{131} \equiv 6\ (p)$.

Para $p = 5$: se tiene que $11 \equiv 1\ (5)$, y así $11^{131} \equiv 1 \equiv 6\ (5)$

Para $p = 13$, tenemos que

$$11^{131} \equiv (-2)^{131} = -2^{11} \cdot (\underbrace{2^{12}}_{\equiv 1})^{10} \equiv -2^5 \cdot 2^5 \cdot 2 = -\underbrace{32 \cdot 32}_{\equiv 6 \cdot 6} \cdot 2 = -\underbrace{36}_{\equiv -3} \cdot 2 \equiv 6\ (13)$$

Luego, los primos que cumplen las condiciones del enunciado son $p = 5$ y $p = 13$.

Resolución del Ejercicio 3

Para $n = 1$, claramente se verifica dicha condición, porque para este valor de n estamos sumando sobre un conjunto vacío de índices.
Para $n \geq 2$: observemos que $z := w^3 \in G_5 \setminus \{1\}$. Por otra parte, un número complejo es cero sii su conjugado lo es, así que el conjugado en la sumatoria nos lo podemos sacar de encima. Tenemos que

$$\sum_{i=4}^{2n} w^{3i} = \sum_{i=4}^{2n} z^i = -\underbrace{\sum_{i=0}^{3} z^i}_{=\frac{z^4-1}{z-1}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{2n} z^i}_{=\frac{z^{2n+1}-1}{z-1}} = \frac{-(z^4-1)}{z-1} + \frac{z^{2n+1}-1}{z-1} = \frac{z^{2n+1}-z^4}{z-1}$$

, que es igual a cero si y solo si

$$z^{2n+1} - z^4 = 0 \iff z^{2n+1} = z^4 \iff z^{2n-3} = 1 \iff w^{6n-9} = 1 \underset{w \text{ 15-ava primitiva}}{\iff} 15|6n-9 = 3(2n-3)$$

$$\iff 5|2n-3 \iff 2n \equiv 3\ (5) \underset{3\cdot 2\equiv 1\ (5)}{\iff} \boxed{n \equiv 4\ (5)}$$

Resolución del Ejercicio 4

Tenemos que

$$\frac{(2-2i)^{11n+2}}{1+i} = 2^{11n+2}(1-i)^{11n+2}\frac{1-i}{|1+i|^2} = 2^{11n+1}(1-i)^{11n+3} \in \mathbb{R}_{<0} \iff (1-i)^{11n+3} \in \mathbb{R}_{<0}$$

$$\iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } (11n+3)\underbrace{\arg(1-i)}_{=\frac{7\pi}{4}} = \pi + 2k\pi \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \frac{7}{4}(11n+3) = 1+2k$$

$$\iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \iff 7(11n+3) - 4 = 8k \iff 8|7(11n+3) - 4 \iff \underbrace{77}_{\equiv 5}n + \underbrace{21}_{\equiv 5} \equiv 4\ (8)$$

$$\iff 5n \equiv -1\ (8) \underset{-(3)\cdot 5\equiv 1\ (8)}{\iff} \boxed{n \equiv 3\ (8)}$$

Resolución del Ejercicio 5

Como $f \in \mathbb{Q}[X]$, la segunda condición implica que $\pm i$ y $\pm\sqrt{3}$ son raíces de f, equivalentemente, que X^2+1 y X^2-3 dividen a f.
La primera condición nos dice que f tiene una raíz múltiple.

Si $\pm i$ fueran raíces múltiples, tenemos que $f = (X^2-3)(X^2+1)^2$, pero este polinomio no cumple con la condición $f(2) = 5$.

Si $\pm\sqrt{3}$ son raíces múltiples, entonces $f = (X^2+1)(X^2-3)^2$, y este polinomio sí cumple con la condición $f(2) = 5$.

Si $\pm i$ y $\pm\sqrt{3}$ son raíces simples, entonces, dado que debe haber una raíz múltiple, se tiene que $f = (X^2+1)(X^2-3)(X-a)^2$ para $a \in \mathbb{Q}$, que despejamos de la condición $f(2) = 5$:

$$5 = f(2) = 5(2-a)^2, \text{ de donde } (a-2)^2 = 1, \text{ o sea, } a = 3 \text{ o } 1$$

Luego, todos los polinomios requeridos son

$$f_1 = \underbrace{(X^2+1)(X^2-3)^2}_{\text{fact. irred. en } \mathbb{Q}[X]} = \underbrace{(X^2+1)(X-\sqrt{3})^2(X+\sqrt{3})^2}_{\text{fact. irred en } \mathbb{R}[X]} = \underbrace{(X-i)(X+i)(X-\sqrt{3})^2(X+\sqrt{3})^2}_{\text{fact. irred. en } \mathbb{C}[X]}$$

$$\begin{aligned} f_2 &= \underbrace{(X^2+1)(X^2-3)(X-1)^2}_{\text{fact. irred en } \mathbb{Q}[X]} = \underbrace{(X^2+1)(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})(X-1)^2}_{\text{fact. irred. en } \mathbb{R}[X]} \\ &= \underbrace{(X-i)(X+i)(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})(X-1)^2}_{\text{fact. irred. en } \mathbb{C}[X]} \\ f_3 &= \underbrace{(X^2+1)(X^2-3)(X-3)^2}_{\text{fact. irred en } \mathbb{Q}[X]} = \underbrace{(X^2+1)(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})(X-3)^2}_{\text{fact. irred. en } \mathbb{R}[X]} \\ &= \underbrace{(X-i)(X+i)(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})(X-3)^2}_{\text{fact. irred. en } \mathbb{C}[X]} \end{aligned}$$

4 Exámenes finales

4.1 25/10/2017

Enunciados del examen

1) Determinar la cantidad de relaciones $\mathcal{R}$ que pueden definirse en el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 40\}$ que satisfacen simultáneamente:
• $\mathcal{R}$ es reflexiva y antisimétrica.
• Para cualesquiera $a, b \in A$, $5|a$ y $5 \not| b$ implica que $a\mathcal{R}b$

2) Hallar el menor $a \in \mathbb{N}$ tal que $7^{203}a \equiv 60 \pmod{41}$ y $(a : 850) = 1$

3) Sean z una raíz primitiva de la unidad de orden 55, y w una raíz primitiva de la unidad de orden 40. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$z^{6n+1} = 1 \text{ y } w^{3n} = w^{27}$$

4) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios en $\mathbb{R}[X]$ definida por

$$\begin{cases} f_1 = X^3 + X^2 - X - 1 \\ f_{n+1} = (X^{n+1} - X^{n-1})f_n + (X^3 + X^2)^{2n} \ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Probar que -1 es raíz de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$, y determinar la multiplicidad de -1 como raíz de f_n, para cada $n \in \mathbb{N}$

5) Factorizar en $\mathbb{C}[X]$ y $\mathbb{R}[X]$ el polinomio $f = X^8 + 3X^4 - 4$

Resolución del Ejercicio 1

> Determinar la cantidad de relaciones $\mathcal{R}$ que pueden definirse en el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 40\}$ que satisfacen simultáneamente:
> • $\mathcal{R}$ es reflexiva y antisimétrica.
> • Para cualesquiera $a, b \in A$, $5|a$ y $5 \not| b$ implica que $a\mathcal{R}b$

Resolución
Los pares (a, b), con $a, b \in A$ tales que $5|a$ y $5 \not| b$ deben estar todos en $\mathcal{R}$. Esto junto con la antisimetría obliga a que ningún par de la forma (a, b), con $a, b \in A$ tales que $5 \not| a$ y $5|b$, pertenece a $\mathcal{R}$.
Para cada conjunto de la forma $\{a, b\}$, con $a \neq b$ ambos múltiplos de 5 (hay en total 8 múltiplos de 5 en A, de manera que hay en total $\binom{8}{2}$ de tales conjuntos), tenemos tres posibilidades excluyentes: el par (a, b) pertenece a $\mathcal{R}$, o el par (b, a) pertenece a $\mathcal{R}$, o ninguno de ellos pertenece a $\mathcal{R}$.
Similarmente, para cada conjunto de la forma $\{a, b\}$ con $a \neq b$ ambos coprimos con 5 (hay en total $40 - 8 = 32$ números coprimos con 5 en A, de manera que hay en total $\binom{32}{2}$ de tales conjuntos), tenemos tres posibilidades.
Luego, la cantidad de relaciones $\mathcal{R}$ que cumplen con las condiciones del enunciado es

$$3^{\binom{8}{2}} \times 3^{\binom{32}{2}}.$$

Resolución del Ejercicio 2

Hallar el menor $a \in \mathbb{N}$ tal que $7^{203}a \equiv 60 \pmod{41}$ y $(a : 850) = 1$

Resolución
Aplicamos el pequeño teorema de Fermat para reducir 7^{203} módulo 41, dividiendo el exponente por 40:

$$7^{203} = 7^{40\times 5+3} = (\underbrace{7^{40}}_{\equiv 1})^5 \times 5^3 \equiv 5^3 = 125 \equiv 2\ (41)$$

Así, tenemos las siguientes equivalencias:

$$7^{203}a \equiv 60\ (41) \iff 2a \equiv 60\ (41) \iff 41 | 2a - 60 = 2(a-30) \underset{(41:2)=1}{\iff} 41 | a - 30 \iff a \equiv 30\ (41)$$

Por otra parte, como $850 = 2 \times 5^2 \times 17$, tenemos que

$$(a : 850) = 1 \iff a \text{ es coprimo con } 2, 5 \text{ y } 17$$

La primera condición del enunciado nos dice, como ya vimos, que $a = 41q + 30$ ($q \in \mathbb{N}_0$). De la condición de que a es impar, deducimos que q debe ser impar, con lo cual $q = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}_0$), y luego

$$a = 41(2k + 1) + 30 = 82k + 71$$

Observar que con $k = 0$, nos da $a = 71$, que es coprimo con 5 y 17.
Luego, el menor $a \in \mathbb{N}$ que cumple con las condiciones del enunciado es $a = 71$.

Resolución del Ejercicio 3

Sean z una raíz primitiva de la unidad de orden 55, y w una raíz primitiva de la unidad de orden 40. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$z^{6n+1} = 1 \text{ y } w^{3n} = w^{27}$$

Resolución
Como z y w son primitivas de orden 55 y 40, respectivamente, tenemos que

$$\begin{cases} z^{6n+1} = 1 \\ \underset{(\iff w^{3n-27}=1)}{w^{3n} = w^{27}} \end{cases} \iff \begin{cases} 55 | 6n+1 \\ 40 | 3n-27 \end{cases} \iff \begin{cases} 55 | 6n+1 \\ 40 | n-9 \end{cases} \iff \begin{cases} 6n \equiv -1 \ (55) \\ n \equiv 9 \ (40) \end{cases}$$

Ahora, como $9 \times 6 = 54 \equiv -1 \ (55)$ (con lo cual $(-9) \times 6 \equiv 1 \ (55)$), multiplicando la primera ecuación del sistema por -9, nos queda el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} n \equiv 9 \ (55) \\ n \equiv 9 \ (40) \end{cases}$$

En términos de divisibilidad, n es solución de este sistema si y solo si $8, 5$ y 11 dividen a $n-9$, equivalentemente (por ser estos tres números coprimos dos a dos), $8 \times 5 \times 11 = 440$ divide a $n - 9$.
Luego, el conjunto de naturales solución del problema es $\{n \in \mathbb{N} : n \equiv 9 \ (440)\}$.

Resolución del Ejercicio 4

> Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios en $\mathbb{R}[X]$ definida por
>
> $$\begin{cases} f_1 = X^3 + X^2 - X - 1 \\ f_{n+1} = (X^{n+1} - X^{n-1})f_n + (X^3 + X^2)^{2n} \ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
>
> Probar que -1 es raíz de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$, y determinar la multiplicidad de -1 como raíz de f_n, para cada $n \in \mathbb{N}$

Resolución
Vemos de inmediato que -1 es raíz doble de f_1. Ahora, reescribamos

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= X^{n-1}(X^2-1)f_n + X^{4n}(X+1)^{2n} = X^{n-1}(X-1)(X+1)f_n + X^{4n}(X+1)^{2n} \\ &= X^{n-1}(X+1)\Big((X-1)f_n + X^{3n+1}(X+1)^{2n-1}\Big) \end{aligned}$$

Conjeturamos que $\text{mult}(-1, f_n) = n$ para todo $n \geq 2$. Para $n = 2$, es fácil verlo (usando que -1 es raíz doble de f_1). Suponiendo que vale para un $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, tenemos que $f_n = (X+1)^n p$, donde $X+1 \not| p$, y volviendo a la expresión obtenida para f_{n+1}, tenemos que

$$f_{n+1} = X^{n-1}(X+1)^{n+1}\Big(\underbrace{(X-1)p + X^{3n+1}(X+1)^{n-1}}_{\text{no tiene a } -1 \text{ como raíz}}\Big)$$

de manera que $\text{mult}(-1, f_{n+1}) = n+1$
Luego, hemos demostrado que

$$\text{mult}(-1, f_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1 \\ n & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Resolución del Ejercicio 5

Factorizar en $\mathbb{C}[X]$ y $\mathbb{R}[X]$ el polinomio $f = X^8 + 3X^4 - 4$

Resolución
Vamos a buscar las raíces complejas de este polinomio. Realizando el cambio $w = z^4$, la ecuación $f(z) = 0$ se transforma en

$$w^2 + 3w - 4 = 0$$

que tiene como raíces a $w_1 = 1$ y $w_2 = -4$
Así, z es raíz de f si y solo si $z^4 = 1$ o $z^4 = -4$, si y solo si $z \in G_4$ o $z \in (1+i)G_4$. (donde $1+i$ es una raíz cuarta de -4). Así, el conjunto de raíces de f es

$$G_4 \cup (1+i)G_4 = \{\pm 1, \pm i, 1 \pm i, -1 \pm i\}$$

Luego, nos queda que

$$\begin{aligned} f &= \underbrace{(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)(X-(1+i))(X-(1-i))(X-(-1+i))(X-(-1-i))}_{\text{factorización irreducible en } \mathbb{C}[X]} \\ &= \underbrace{(X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2-2X+2)(X^2+2X+2)}_{\text{factorización irreducible en } \mathbb{R}[X]} \end{aligned}$$

4.2 22/12/2015

Enunciados del examen

1) Dada la sucesión

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1 \\ 2^3 &= 3+5 \\ 3^3 &= 7+9+11 \\ 4^3 &= 13+15+17+19 \\ &\vdots \end{aligned}$$

, dar una fórmula general y probarla.

2) Hallar el resto de dividir por p a $\sum_{i=1}^{3p+1} i^{p(p-1)}$, con p primo positivo.

3) Sabiendo que

$$r_9(4x) = 2,\ r_{14}(3x) = 5,\ \text{ y } r_{20}(3x) = 1$$

, hallar el resto de dividir a x por 2520.

4) Dada la relación en $\mathbb{R}[X]$ definida por

$$p\mathcal{R}q \iff p \text{ y } q \text{ tienen el mismo resto en la división por } X^2+1$$

i) Probar que es de equivalencia.

ii) Dados $p, q \in \mathbb{R}[X]$, sabiendo que el resto de dividir a p por X^2+1 es $aX+b$, y el resto de dividir a q por X^2+1 es $cX+d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$), hallar la clase de equivalencia de $p+q$ y la de $p.q$. ¿A qué le hace recordar?

Resolución del Ejercicio 1

Dada la sucesión

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 3 + 5 \\ a_3 &= 7 + 9 + 11 \\ a_4 &= 13 + 15 + 17 + 19 \\ &\vdots \end{aligned}$$

, dar una fórmula general y probarla.

Resolución
Aquí, la secuencia $(a_n)_n$ viene dada por

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} ((n-1)n + 2i + 1), \; n \in \mathbb{N}$$

Conjeturamos que $a_n = n^3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, tenemos que

$$a_n = (n-1)n^2 + \sum_{i=0}^{n-1} (2i+1) = (n-1)n^2 + 2\sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} 1 = (n-1)n^2 + (n-1)n + n$$
$$= n^3 \cancel{-n^2 + n^2} \cancel{-n + n} = n^3$$

Resolución del Ejercicio 2

Hallar el resto de dividir por p a $\sum_{i=1}^{3p+1} i^{p(p-1)}$, con p primo positivo.

Resolución
Aplicamos Fermat:

$$\sum_{i=1}^{3p+1} i^{p(p-1)} = \sum_{i=1}^{3p+1} (\underbrace{i^p}_{\equiv i\ (p)})^{p-1} \equiv \sum_{i=1}^{3p+1} i^{p-1} = \underbrace{\sum_{\substack{1\leq i\leq 3p+1 \\ p|i}} \underbrace{i^{p-1}}_{\equiv 0}}_{\equiv 0} + \sum_{\substack{1\leq i\leq 3p+1 \\ (i:p)=1}} \underbrace{i^{p-1}}_{\equiv 1} \equiv \sum_{\substack{1\leq i\leq 3p+1 \\ (i:p)=1}} 1$$

$$= \underbrace{3p}_{\equiv 0} +1 - 3 \equiv p-2$$

(En la anteúltima igualdad hemos usado que, como entre 1 y $3p+1$, hay $\lfloor \frac{3p+1}{p} \rfloor = \lfloor 3 + \frac{1}{p} \rfloor = 3$ múltiplos de p, entonces hay $3p+1-3$ números coprimos con p.)

Resolución del Ejercicio 3

Sabiendo que

$$r_9(4x) = 2,\ r_{14}(3x) = 5,\ \text{ y } r_{20}(3x) = 1$$

, hallar el resto de dividir a x por 2520.

Resolución
Tenemos que $2520 = 252 \times 10 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$, y

$$\begin{cases} 4x \equiv 2\ (9) \\ 3x \equiv 5\ (14) \\ 3x \equiv 1\ (20) \end{cases} \underset{\substack{7\times 4\equiv 1\ (9) \\ 5\times 3\equiv 1\ (14) \\ 7\times 3\equiv 1\ (20)}}{\iff} \begin{cases} x \equiv 5\ (9) \\ x \equiv 11\ (14) \\ x \equiv 7\ (20) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 5\ (9) \\ x \equiv \underbrace{11}_{\equiv 4}\ (7) \\ x \equiv \underbrace{11}_{\equiv 1}\ (2) \\ x \equiv \underbrace{7}_{\equiv 2}\ (5) \\ x \equiv \underbrace{7}_{\equiv 3}\ (4) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 5\ (9) \\ x \equiv 4\ (7) \\ x \equiv 2\ (5) \\ \underset{(\iff x\equiv 3 \text{ o } 7\ (8))}{x \equiv 3\ (4)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \equiv 5\ (9) \\ x \equiv 4\ (7) \\ x \equiv 2\ (5) \end{cases} \quad \text{y} \quad x \equiv 3 \text{ o } 7\ (8)$$

De la primera ecuación, sacamos que $x = 9a + 5$. Sustituimos en la segunda y obtenemos que $9a + 5 \equiv 4\ (7)$, equivalentemente, $9a \equiv 6\ (7)$, o sea, (multiplicando por 4, que nos sirve pues $4 \times 9 \equiv 1\ (7)$), $a \equiv 3\ (7)$, de manera que $a = 7b + 3$, y entonces

$$x = 9(7b + 3) + 5 = 63b + 32$$

Vamos a la tercera ecuación y nos queda que $3b + 2 \equiv 2\ (5)$, o sea, $3b \equiv 0\ (5)$, que nos dice que $5|b$, de modo que $b = 5c$, y entonces

$$x = 63(5c) + 32 = 315c + 32$$

Así, módulo 8, se tiene que $x \equiv \underbrace{315}_{\equiv 3} c \equiv 3c\ (8)$

Así, si $x \equiv 3\ (8)$, se tiene que $3 \equiv 3c\ (8)$, con lo cual $c \equiv 1\ (8)$, es decir, $c = 8d + 1$, y entonces

$$x = 315(8d + 1) + 32 = 2520d + 347,\ \text{de modo que } r_{2520}(x) = 347$$

Si $x \equiv 7\ (8)$, se tiene que $3c \equiv 7\ (8)$, equivalentemente, (multiplicando por 3), $c \equiv 5\ (8)$, de manera que $c = 8d + 5$, y entonces

$$x = 315(8d + 5) + 32 = 2520d + 1607,\ \text{de modo que } r_{2520}(x) = 1607$$

En definitiva,

$$r_{2520}(x) = \begin{cases} 347 & \text{si } x \equiv 3\ (8) \\ 1607 & \text{si } x \equiv 7\ (8) \end{cases}$$

Resolución del Ejercicio 4

Dada la relación en $\mathbb{R}[X]$ definida por

$$p\mathcal{R}q \iff p \text{ y } q \text{ tienen el mismo resto en la división por } X^2+1$$

i) Probar que es de equivalencia.

ii) Dados $p, q \in \mathbb{R}[X]$, sabiendo que el resto de dividir a p por X^2+1 es $aX+b$, y el resto de dividir a q por X^2+1 es $cX+d$ ($a,b,c,d \in \mathbb{R}$), hallar la clase de equivalencia de $p+q$ y la de $p.q$. ¿A qué le hace recordar?

Resolución
Es trivial ver que la relación es de equivalencia (es la relación de congruencia de polinomios módulo X^2+1)
Para el segundo ítem, tenemos que

$$\begin{aligned} p+q &\equiv (aX+b)+(cX+d) = (b+d)+(a+c)X \\ p.q &\equiv (aX+b)(cX+d) = ac\underbrace{X^2}_{\equiv -1}+(ad+bc)X+bd \equiv (bd-ac)+(ad+bc)X \end{aligned}$$

Así, vemos que la clases de polinomios módulo X^2+1 corresponde con los números complejos con las operaciones de suma y multiplicación, identificando $a+bX$ con $a+bi$.

4.3 4/08/2015

Enunciados del examen

1) Definimos en $\mathbb{Q}[X]$ la relación $\mathcal{R}$ dada por $f\mathcal{R}g$ si $fg' = f'g$. ¿Es $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia?
   Encuentre todos los $f \in \mathbb{Q}[X]$ tales que $f\mathcal{R}X$

2) Hallar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))^{5n+1} = -1 \text{ y } (\cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5}))^{2n-1} = 1$$

3) ¿Cuántas funciones biyectivas $f : \{1, 2, 3, \ldots, 18\} \longrightarrow \{1, 2, 3, \ldots, 18\}$ hay que satisfacen $f(a) \equiv -a \pmod 9$?

4) Sea $T : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{Q}[X]$ la función definida por $T(f) = X^2 f - (X+1)f'$.
   Pruebe que T es inyectiva, pero no es sobreyectiva

Resolución del Ejercicio 1

Definimos en $\mathbb{Q}[X]$ la relación $\mathcal{R}$ dada por $f\mathcal{R}g$ si $fg' = f'g$. ¿Es $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia?
Encuentre todos los $f \in \mathbb{Q}[X]$ tales que $f\mathcal{R}X$

Resolución
Es evidente que la relación es reflexiva y simétrica.
Observe que si $f\mathcal{R}g$ y f es constante no nulo, entonces $g' = 0$, de modo que g es constante. Por otra parte, trivialmente, se tiene que $0\mathcal{R}f$ para todo $f \in \mathbb{Q}[X]$
Veamos si es transitiva: dados f, g, h tales que $f\mathcal{R}g$ y $g\mathcal{R}h$, queremos ver si esto implica que $f\mathcal{R}h$. Pues bien, sabemos que que $f\mathcal{R}0$ y $0\mathcal{R}g$ para cualesquiera $f, g \in \mathbb{Q}[X]$. Si tomamos f, g tales que $f \not\mathcal{R} g$ (por ejemplo, $f = X$ y $g = 1$), tenemos que $f\mathcal{R}0$ y $0\mathcal{R}g$, pero $f \not\mathcal{R} g$.
Luego, la relación no es transitiva, así que no es de equivalencia.
Para la segunda parte:

$$\{f \in \mathbb{Q}[X] : f\mathcal{R}X\} = \{f \in \mathbb{Q}[X] : f = f'X\}$$

Dado $f = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Q}[X]$, tenemos que

$$\begin{aligned} f = f'X &\iff a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 = na_nX^n + (n-1)a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X \\ &\iff ia_i = a_i \ \forall\ 1 \le i \le n \iff a_0 = 0,\ a_1 \in \mathbb{Q} \text{ y } a_i = 0\ \forall\ i \ge 2 \end{aligned}$$

En definitiva,

$$\{f \in \mathbb{Q}[X] : f\mathcal{R}X\} = \{aX : a \in \mathbb{Q}\}$$

Resolución del Ejercicio 2

Hallar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))^{5n+1} = -1 \text{ y } (\cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5}))^{2n-1} = 1$$

Resolución
Tenemos que

$$\begin{aligned}
&(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))^{5n+1} = -1 \iff \exists\ k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \frac{(5n+1)\pi}{3} = \pi + 2k\pi \\
&\iff \exists\ k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } 5n+1 = 3(1+2k) \iff \exists\ k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } 5n-2 = 6k \\
&\iff 6|5n-2 \iff 5n \equiv 2\ (6) \underset{5\times 5\equiv 1\ (6)}{\iff} n \equiv 4\ (6)
\end{aligned}$$

En cuanto a la otra condición del enunciado, como $\cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5})$ es raíz quinta (primitiva) de la unidad, se tiene que

$$(\cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5}))^{2n-1} = 1 \iff 5|2n-1 \iff 2n \equiv 1\ (5) \underset{3\times 2\equiv 1\ (5)}{\iff} n \equiv 3\ (5)$$

Por lo tanto, un $n \in \mathbb{Z}$ cumple las condiciones del enunciado si y solo si es solución del siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{cases} n \equiv 4\ (6) \\ n \equiv 3\ (5) \end{cases}$$

, el cual tiene una única solución módulo $6 \times 5 = 30$, por el teorema chino del resto. De la primera ecuación, sacamos que $n = 6q + 4$. Sustituimos en la segunda y obtenemos

$$\begin{aligned}
&6q + 4 \equiv 3\ (5), \iff 6q \equiv \underbrace{-1}_{\equiv 4}\ (5) \iff 5|6q-4 = 2(3q-2) \iff 5|3q-2 \iff 3q \equiv 2\ (5) \\
&\underset{2\times 3\equiv 1\ (5)}{\iff} q \equiv 4\ (5)
\end{aligned}$$

, de modo que $q = 5k + 4$, y entonces

$$n = 6(5k+4) + 4 = 30k + 28$$

En definitiva, el conjunto solución al problema del enunciado es
$\{n \in \mathbb{Z} : n \equiv 28\ (30)\}$

Resolución del Ejercicio 3

> ¿Cuántas funciones biyectivas $f : \{1, 2, 3, \ldots, 18\} \longrightarrow \{1, 2, 3, \ldots, 18\}$ hay que satisfacen $f(a) \equiv -a \pmod 9$?

Resolución
Tenemos que

$$\begin{aligned}
f(1) &= 8 \text{ o } 17 \text{ (Los congruentes a } 8)\\
f(2) &= 7 \text{ o } 16 \text{ (Los congruentes a } 7)\\
f(3) &= 6 \text{ o } 15 \text{ (Los congruentes a } 6)\\
f(4) &= 5 \text{ o } 14 \text{ (Los congruentes a } 5)\\
f(5) &= 4 \text{ o } 13 \text{ (Los congruentes a } 4)\\
f(6) &= 3 \text{ o } 12 \text{ (Los congruentes a } 3)\\
f(7) &= 2 \text{ o } 11 \text{ (Los congruentes a } 2)\\
f(8) &= 1 \text{ o } 10 \text{ (Los congruentes a } 1)\\
f(9) &= 9 \text{ o } 18 \text{ (Los congruentes a } 0)
\end{aligned}$$

Ahora, como $f(18-i) \equiv -(18-i) \equiv i\ (9)$ para cada $0 \leq i \leq 8$, tenemos que

$$\begin{aligned}
f(18) &\equiv 0, \quad \text{con lo cual } \{f(18), f(9)\} = \{9, 18\}\\
f(17) &\equiv 1, \quad \text{con lo cual } \{f(17), f(8)\} = \{1, 10\}\\
f(16) &\equiv 2, \quad \text{con lo cual } \{f(16), f(7)\} = \{2, 11\}\\
f(15) &\equiv 3, \quad \text{con lo cual } \{f(15), f(6)\} = \{3, 12\}\\
f(14) &\equiv 4, \quad \text{con lo cual } \{f(14), f(5)\} = \{4, 13\}\\
f(13) &\equiv 5, \quad \text{con lo cual } \{f(13), f(4)\} = \{5, 14\}\\
f(12) &\equiv 6, \quad \text{con lo cual } \{f(12), f(3)\} = \{6, 15\}\\
f(11) &\equiv 7, \quad \text{con lo cual } \{f(11), f(2)\} = \{7, 16\}\\
f(10) &\equiv 8, \quad \text{con lo cual } \{f(10), f(1)\} = \{8, 17\}
\end{aligned}$$

Vemos así que la cantidad de funciones que cumplen las condiciones requeridas es 2^9.

Resolución del Ejercicio 4

> Sea $T : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{Q}[X]$ la función definida por $T(f) = X^2 f - (X+1)f'$. Pruebe que T es inyectiva, pero no es sobreyectiva

Resolución
Veamos que es inyectiva: observe que T es $\mathbb{Q}$-lineal, de modo que basta ver que $T(f) = 0$ si y solo si $f = 0$. Pues bien,

$$T(f) = 0 \Longleftrightarrow X^2 f - (X+1)f' = 0 \Longleftrightarrow X^2 f = (X+1)f'$$

Ahora, observe que si $f \neq 0$, entonces $\text{gr}(X^2 f) = 2 + \text{gr}(f)$, y $\text{gr}((X+1)f') = 1 + \text{gr}(f) - 1 = \text{gr}(f)$. Por lo tanto, $X^2 f = (X+1)f'$ equivale a que $f = 0$.
Luego, T es inyectiva.

Veamos que no es sobreyectiva: basta ver que un polinomio constante igual a $k \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ no está en la imagen de T. Pues bien, si $f \neq 0$, tenemos que

$$\text{gr}(T(f)) = \max\{\text{gr}(X^2 f), \text{gr}((X+1)f')\} = \max\{\text{gr}(f) + 2, \text{gr}(f)\} = \text{gr}(f) + 2 \neq 0 = \text{gr}(k)$$

Luego, las constantes no nulas no están en la imagen de T, con lo cual T no es sobreyectiva.

1	2	3	4	5

Calif.

Apellido y Nombre:
Libreta:

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2013
Final – 27/12/2013

---

1. Sea G_{20} el conjunto de raíces 20-avas de la unidad y G_4 el conjunto de raíces cuartas de la unidad. Sea $\sim$ la relación en G_{20} definida por

$$a \sim b \iff a = \omega b, \text{ para algún } \omega \in G_4,$$

o sea dos elementos están relacionados si uno es un múltiplo del otro por una raíz cuarta de la unidad.

- Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.
- ¿Cuántas clases de equivalencia hay en total?

---

2. Sea n un número natural ≥ 2 que no es múltiplo de 4. Probar que la cifra de las unidades de

$$2^{n-1}(2^n - 1)$$

es 6 u 8.

3.
- Hallar los restos de dividir a $7 \cdot 109 + 2^{110}$ y a $3 \cdot 109 - 2^{109}$ por 13.
- Sea $n \in \mathbb{N}$ *impar*. Determinar los posibles valores de $(7n + 2^{n+1} : 3n - 2^n)$ y para cada valor de d hallado, exhibir un $n \in \mathbb{N}$ tal que $(7n + 2^{n+1} : 3n - 2^n) = d$.

4.
- Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ para los cuales el polinomio

$$X^5 + 15aX^4 + 12bX^3 - 18X^2 - 1$$

tiene al menos una raíz racional.

- Probar que cualesquiera sean a, b hallados en el inciso anterior, esa raíz racional es única y simple.

---

5. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar el resto de dividir n^{2n} por 5 en términos de una congruencia adecuada de n.

Justifique todas sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

4.4 27/12/2013

Enunciados del examen

Los enunciados están en la página anterior. El ejercicio 1 está en la práctica de números complejos, y por ende no lo resolvemos aquí

Resolución del Ejercicio 2

> Sea $n \geq 2$ un natural que no es múltiplo de 4. Probar que la cifra de las unidades de $2^{n-1}(2^n - 1)$ es 6 u 8.

Resolución
Tenemos que mirar al número $x := 2^{n-1}(2^n - 1)$ módulo $10 = 5 \times 2$. Es evidente que $x \equiv 0 \pmod 2$. Para mirar la congruencia módulo 5, aplicamos Fermat: si $r_4(n)$ denota el resto de dividir a n por 4 (sabemos que es positivo, por hipótesis), tenemos que

$$x = 2^{n-1}(2^n - 1) \equiv 2^{r_4(n)-1}(2^{r_4(n)} - 1) = \begin{cases} 1 & \text{si } r_4(n) = 1 \\ 2 \times 3 = 6 \equiv 1 \pmod 5 & \text{si } r_4(n) = 2 \\ 4 \times 7 = 28 \equiv 3 \pmod 5 & \text{si } r_4(n) = 3 \end{cases}$$

Por lo tanto, si $r_4(n) = 3$, entonces x es solución del sistema

$$\begin{cases} a \equiv 0 \pmod 2 \\ a \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}$$

, con lo cual, recordando que por el teorema chino del resto hay una única solución módulo $5 \times 2 = 10$, y observando que 8 es solución del sistema, se concluye que $x \equiv 8 \pmod{10}$

Si $r_4(n) = 1$ o 2, entonces x es solución del sistema

$$\begin{cases} a \equiv 0 \pmod 2 \\ a \equiv 1 \pmod 5 \end{cases}$$

, con lo cual, observando que 6 es solución del sistema, se tiene que $x \equiv 6 \pmod{10}$

Resolución del Ejercicio 3

> i) Hallar los restos de dividir a $7 \cdot 109 + 2^{110}$ y a $3 \cdot 109 - 2^{109}$ por 13
>
> ii) Sea $n \in \mathbb{N}$ impar. Determinar los posibles valores de $d = (7n + 2^{n+1} : 3n - 2^n)$, y para cada valor de d hallado, exhibir un n correspondiente.

Resolución
i) Aplicamos Fermat (dividimos los exponentes por 12):

$$7 \cdot \underbrace{109}_{\equiv 5} + \underbrace{2^{110}}_{=2^{12\cdot 9+2} \equiv 2^2} \equiv 35 + 4 = 39 \equiv 0 \pmod{13}$$
$$3 \cdot \underbrace{109}_{\equiv 5} - \underbrace{2^{109}}_{=2^{12\times 9+1} \equiv 2} \equiv 15 - 2 = 13 \equiv 0 \pmod{13}$$

ii) Tenemos que

$$d|3(7n + 2^{n+1}) - 7(3n - 2^n) = 3 \cdot 2^{n+1} + 7 \cdot 2^n = 2^n(6+7) = 2^n \cdot 13$$

Notar por otra parte que 2 no divide a d (pues en tal caso tendríamos que 2 divide a n), de manera que $d = 1$ o 13.

En virtud del ejemplo del ítem previo, vemos que si $n = 109$, entonces $d = 13$.
La condición $d = 13$ equivalente a que $-7n \equiv 2^{n+1} \pmod{13}$ y $3n \equiv 2^n \pmod{13}$, equivalentemente (teniendo en cuenta que $2 \cdot 7 \equiv 1 \pmod{13}$ y $4 \times 3 \equiv -1 \pmod{13}$),

$$\begin{cases} n \equiv -2^{n+2} \pmod{13} \\ n \equiv -2^{n+2} \pmod{13} \end{cases}$$

, si y solo si $13|n + 2^{n+2}$.
Así, si por ejemplo $n = 1$, entonces $d = 1$, como es fácil comprobar.

Resolución del Ejercicio 4

Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + 15aX^4 + 12bX^3 - 18X^2 - 1$$

tiene una raíz racional, y probar que para cualesquiera de tales $a, b \in \mathbb{Z}$, esa raíz racional es única y simple

Resolución
Por el criterio de Gauss, los únicos candidatos a raíces racionales son 1 o -1. Tenemos que

$$\begin{gathered} 0 = f(1) = \cancel{1} + 15a + 12b - 18 - \cancel{1} \Longleftrightarrow 15a + 12b = 18 \Longleftrightarrow 5a + 4b = 6 \\ \text{mientras que } 0 = f(-1) = -1 + 15a - 12b - 18 - 1 \Longleftrightarrow \underbrace{15a - 12b = 20}_{\substack{\text{no tiene solución} \\ \text{pues 3 no divide a 20}}} \end{gathered}$$

Luego, f tiene una raíz racional sii $5a + 4b = 6$ (en cuyo caso 1 es la única raíz racional): observando que $5 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = 1$, con lo cual $(6, -6)$ es solución particular, todas las soluciones de esta diofántica son las de la forma

$$(a, b) = (6, -6) + q(-4, 5) = (6 - 4q, 5q - 6), \ q \in \mathbb{Z}$$

Para tales (a, b), veamos que $f'(1) \neq 0$, con lo cual 1 es raíz simple de f:

$$\begin{aligned} f'(1) &= 5X^4 + 60aX^3 + 36bX^2 - 36X\Big|_{X=1} = 5 + 60a + 36b - 36 = -31 + 12(5a + 3b) \\ &= -31 + 12(\underbrace{5a + 4b}_{=6} - b) = -31 + 12(6 - b) = 12 \cdot 6 - 31 - 12b = 72 - 31 - 12b = \underbrace{41}_{\equiv 1\ (5)} - \underbrace{12}_{\equiv 2\ (5)} b \\ &\underset{b \equiv 4\ (5)}{\equiv} 1 - 4 \cdot 2 = -7 \equiv 3\ (5) \end{aligned}$$

En particular, $f'(1) \neq 0$.

Resolución del Ejercicio 5

Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar el resto de dividir n^{2n} por 5, en términos de una congruencia adecuada de n.

Resolución
Evidentemente, si $5|n$, entonces $r_5(n^{2n}) = 0$.
Supongamos que 5 no divide a n. Escribiendo $n = 2q_n + r_2(n)$, tenemos que

$$n^{2n} = n^{2(2q_n + r_2(n))} = n^{4q_n + 2r_2(n)} \underset{n^4 \equiv 1\ (5)}{\equiv} n^{2r_2(n)} = \begin{cases} \equiv 1 & \text{si } r_2(n) = 0 \\ \equiv n^2 & \text{si } r_2(n) = 1 \end{cases}$$

Los cuadrados módulo 5 son 1 y 4.
Tenemos que $n^2 \equiv 1\ (5)$ si y solo si $5|(n-1)(n+1)$ si y solo si $n \equiv 1\ (5)$ o $n \equiv 4\ (5)$.
Mientras que $n^2 \equiv 4\ (5)$ si y solo si $5|(n-2)(n+2)$ sii $n \equiv 2\ (5)$ o $n \equiv 3\ (5)$. Por lo tanto,

$$r_5(n^{2n}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0\ (5) \iff n \equiv 0 \text{ o } 5\ (10) \\ 1 & \text{si } n \not\equiv 0\ (5) \text{ y } n \equiv 0\ (2) \iff n \equiv 2, 4, 6 \text{ u } 8\ (10) \\ 1 & \text{si } n \equiv 1 \text{ o } 4\ (5) \text{ y } n \equiv 1\ (2) \iff n \equiv 1 \text{ o } 9\ (10) \\ 4 & \text{si } n \equiv 2 \text{ o } 3\ (5) \text{ y } n \equiv 1\ (2) \iff n \equiv 7 \text{ o } 3\ (10) \end{cases}$$

4.5 08/10/2013

Enunciados del Examen

FINAL - 8 de Octubre de 2013

LU $N°$	Apellido y Nombre

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Ej. 5	Nota

1. Pruebe que $\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-1} = 2^n$ para todo n natural.

2. Un grupo de 8 amigos va esta noche al teatro y tiene entradas para sentarse en 8 asientos consecutivos. Entre ellos, Juan está peleado con María y con Pedro ¿ De cuántas formas distintas pueden sentarse en las 8 butacas de manera que Juan no se siente al lado de María ni de Pedro?

3. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $30^n \equiv 1(7)$.

4. Determinar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^{12} = 1$ y $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 \in \mathbb{R}$.

5. Hallar todos los polinomios $p \in \mathbb{R}[x]$ tales que $(x+1)p = (p')^2$ (donde p' es el polinomio derivado).

Resolución del Ejercicio 1

Pruebe que $\prod\limits_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-1} = 2^n$ para todo natural n.

Resolución
Tenemos que

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-1} = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}{1\cdot 3\dots(2n-1)} = \frac{(2n)!}{n!}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1}$$

, de modo que lo que tenemos que probar es equivalente a

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1} = \frac{n!}{(2n)!}2^n$$

Para $n = 1$, esta igualdad es trivialmente cierta. Asumiendo que es verdadera para un $n \geq 1$, veamos que vale para $n+1$:

$$\prod_{i=1}^{n+1}\frac{1}{2i-1} = \frac{1}{2n+1}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1} \underset{HI}{=} \frac{1}{2n+1}\frac{n!}{(2n)!}2^n = \frac{n!}{(2n+2)!}2^n(2n+2) = \frac{(n+1)!}{(2(n+1))!}2^{n+1}$$

, como requerido.

Resolución del Ejercicio 2

Un grupo de 8 amigos va esta noche al teatro y tiene entradas para sentarse en 8 asientos consecutivos. Entre ellos, Juan está peleado con María y con Pedro. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse en las 8 butacas de manera que Juan no está al lado de María ni de Pedro?

Resolución
Si Juan está en el primer asiento, Pedro y María pueden sentarse del tercero en adelante, es decir, hay $6 \cdot 5$ maneras de ubicar a Pedro y María, y ubicados ellos, los demás tienen $5!$ maneras de ubicarse en los restantes asientos (asi que hay $6 \cdot 5 \cdot 5! = 30 \cdot 120 = 3600$ maneras de que se sienten, si Juan está en el primer asiento). Lo mismo si Juan se sienta en el último asiento. Si Juan se sienta en el asiento i, con $2 \leq i \leq 7$, hay $5 \cdot 4$ maneras de ubicar a Pedro y María (así que hay $5 \cdot 4 \cdot 5! = 20 \cdot 120 = 2400$ maneras de sentarse, si Juan está en el asiento i, con $2 \leq i \leq 7$ fijo). Por lo tanto, la cantidad de formas de sentarse con las condiciones impuestas es

$$2 \cdot 3600 + 6 \cdot 2400 = 7200 + 14400 = 21600$$

Resolución del Ejercicio 3

Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $30^n \equiv 1\ (7)$

Resolución

Escribiendo $n = 6q_n + r_6(n)$, y recordando por Fermat que $30^6 \equiv 1\ (7)$, tenemos que

$$30^n \equiv 1\ (7) \iff \underbrace{30^{r_6(n)}}_{6^{r_6(n)}5^{r_6(n)}} \equiv 1\ (7) \underset{\substack{6\equiv -1\ (7)\\ 5\equiv -2\ (7)}}{\iff} (-1)^{r_6(n)}(-2)^{r_6(n)} \equiv 1\ (7) \iff r_6(n) = 0 \text{ o } 3$$

$$\iff n \equiv 0 \text{ o } 3\ (6) \iff n \equiv 0\ (3)$$

Resolución del Ejercicio 4

Determinar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^{12} = 1$ y $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 \in \mathbb{R}$

Resolución
Tenemos que

$$z^{12} = 1 \iff (z^6)^2 = 1 \iff z^6 = 1 \text{ o } -1 \iff z \in G_6 \text{ o } z^6 = -1$$

El número $z = 1$ claramente cumple con las condiciones del enunciado. Para z tal que $z \in G_6 \setminus \{1\}$, o $z^6 = -1$, tenemos que

$$\sum_{i=0}^{5} z^i = \frac{z^6 - 1}{z - 1} = \begin{cases} 0 \in \mathbb{R} & \text{si } z \in G_6 \setminus \{1\} \\ \frac{2}{1-z} \notin \mathbb{R} & \text{si } z^6 = -1 \text{ (en cuyo caso } z \notin \mathbb{R}) \end{cases}$$

Por consiguiente, el conjunto de complejos que cumple con las condiciones del enunciado es G_6.

Resolución del Ejercicio 5

> Hallar todos los polinomios $p \in \mathbb{R}[X]$ tales que $(X+1)p = (p')^2$ (donde p' es el polinomio derivado).

Resolución
El único polinomio constante que cumple con esa condición es el polinomio nulo. Si ahora p es un polinomio no constante que cumple con esa condición, entonces

$$1 + \text{gr}(p) = 2(\text{gr}(p) - 1), \quad \text{de donde } \text{gr}(p) = 3$$

Escribamos pues $p(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Tenemos que

$$\begin{aligned} (X+1)p &= (p')^2 \\ (X+1)(aX^3 + bX^2 + cX + d) &= (3aX^2 + 2bX + c)^2 \\ aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + aX^3 + bX^2 + cX + d &= (3aX^2 + 2bX + c)^2 \\ aX^4 + (a+b)X^3 + (b+c)X^2 + (c+d)X + d &= (3aX^2 + 2bX + c)(3aX^2 + 2bX + c) \end{aligned}$$

de donde, igualando coeficientes, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} a = 9a^2 \\ a + b = 2 \cdot (6ab) \\ b + c = 3ac + 4b^2 + 3ac \\ c + d = 2bc + 2bc \\ d = c^2 \end{cases}$$

De la primer ecuación, sacamos que $a = 0$ o $a = \frac{1}{9}$ (ahora es fácil ver del sistema que si $a = 0$, entonces todos los coeficientes serían 0, con lo cual $a = \frac{1}{9}$). Vamos a la segunda ecuación, y obtenemos que

$$\frac{1}{9} + b = \frac{4}{3}b \text{ de donde } \frac{1}{9} = \frac{1}{3}b, \text{ y entonces } b = \frac{1}{3}$$

Vamos a la tercer ecuación, y tenemos que

$$\frac{1}{3} + c = \frac{2}{3}c + \frac{4}{9}, \text{ de donde } \frac{1}{3}c = \frac{1}{9}, \text{ y entonces } c = \frac{1}{3}$$

Vamos a la quinta ecuación y sacamos $d = \frac{1}{9}$. Estos valores de a, b, c, d hallados verifican la tercer ecuación.
Por consiguiente, los únicos polinomios que cumplen la condición del enunciado son

$$0 \text{ y } \frac{1}{3}(\frac{1}{3}X^3 + X^2 + X + \frac{1}{3})$$

4.6 30/07/2013

Enunciados del examen

ÁLGEBRA I

FINAL - 30 de Julio de 2013

LU $N°$	Apellido y Nombre

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Ej. 5	Nota
B^-	B	B	B	B^-	10

1. Sea

$$a_i := \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, \\ 3 & \text{si } i = 2, \\ \frac{1}{2}(a_{i-2} + a_{i-1}) & \text{si } i > 2. \end{cases}$$

   Pruebe que

   i) $a_1 < a_3 < a_5 < \cdots$ y $a_2 > a_4 > a_6 > \cdots$

   ii) $a_n = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Sean A y B conjuntos finitos de cardinal n y m respectivamente. Sean x e y dos elementos distintos de A. Calcular cuántas funciones $f : A \to B$ hay tales que $f(x) = f(y)$.

3. Pruebe que si el dígito de las unidades de un número entero a es tres, entonces el dígito de las unidades de a^n es 1, 3, 7 o 9, para cada número natural n. Diga cuándo se da cada uno de estos resultados.

4. Determinar los $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$|z| = \frac{1}{|z|} = |1 - z|.$$

5. Sea $P \in \mathbb{R}[X]$. Supóngase que el resto de dividir P por $X - 1$ es a y el resto de dividir P por $X - 2$ es b. ¿Cual es el resto de dividir P por $(X - 1)(X - 2)$?

Resolución del Ejercicio 1

Sea la sucesión dada por

$$a_i := \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 3 & \text{si } i = 2 \\ \frac{1}{2}(a_{i-2} + a_{i-1}) & \text{si } i > 2 \end{cases}$$

Pruebe que

i) $a_1 < a_3 < a_5 < \ldots$ y $a_2 > a_4 > a_6 > \ldots$

ii) $a_n = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}(\frac{-1}{2})^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Resolución
i) Veamos que para todo $n \in \mathbb{N}_0$,

$$a_{2n+1} < a_{2n+3} < a_{2n+4} < a_{2n+2}$$

Para $n = 0$, esto es evidente, pues a_3 es el punto medio entre $a_1 < a_2$ (con lo cual $a_1 < a_3 < a_2$) y a_4 es el punto medio entre $a_3 < a_2$ (con lo cual $a_3 < a_4 < a_2$), y nos queda así que

$$a_1 < a_3 < a_4 < a_2$$

Supongamos que vale para un $n \in \mathbb{N}_0$, y veamos que vale para $n + 1$, esto es, veamos que

$$a_{2n+3} < a_{2n+5} < a_{2n+6} < a_{2n+4}$$

Pues bien, a_{2n+5} es el punto medio entre $a_{2n+3} \underset{HI}{<} a_{2n+4}$ (con lo cual $a_{2n+3} < a_{2n+5} < a_{2n+4}$), y a_{2n+6} es el punto medio entre $a_{2n+5} < a_{2n+4}$ (con lo cual $a_{2n+5} < a_{2n+6} < a_{2n+4}$), y nos queda así que

$$a_{2n+3} < a_{2n+5} < a_{2n+6} < a_{2n+4}$$

, como requeríamos.

ii) Para $n = 1, 2$, esto es claro. Procedemos por inducción global: dado $n > 2$, suponiendo que la igualdad es cierta para todo $1 \leq k < n$, tenemos que

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) = \frac{1}{2}(\frac{7}{3} - \frac{4}{3}(\frac{-1}{2})^{n-2} + \frac{7}{3} - \frac{4}{3}(\frac{-1}{2})^{n-3}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{14}{3} - \frac{4}{3}(\frac{-1}{2})^{n-3}\underbrace{(\frac{-1}{2} + 1)}_{=1/2}\Big)$$

$$= \frac{7}{3} - \frac{1}{3}(\frac{-1}{2})^{n-3} = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}(\frac{-1}{2})^{n-3}(\frac{-1}{2})^2 = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}(\frac{-1}{2})^{n-1}$$

Resolución del Ejercicio 2

Sean A, B conjuntos finitos de cardinal $n \geq 2$ y m respectivamente. Sean x, y dos elementos distintos de A. Calcular cuántas funciones $f : A \longrightarrow B$ hay tales que $f(x) = f(y)$

Resolución
Si $m = 0$, no hay ninguna.
Supongamos que $m \geq 1$, y notemos $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$. Podemos escribir el conjunto en cuestión (cuyo cardinal queremos calcular) como la siguiente unión disjunta:

$$\{f : A \longrightarrow B : f(x) = f(y)\} = \bigcup_{i=1}^{m} \underbrace{\{f : A \longrightarrow B : f(x) = f(y) = b_i\}}_{\text{tiene cardinal igual a } m^{n-2}}$$

Por consiguiente,

$$\#\{f : A \longrightarrow B : f(x) = f(y)\} = m \times m^{n-2} = m^{n-1}$$

Resolución del Ejercicio 3

Probar que si el dígido de las unidades de un número entero a es 3, entonces el dígido de las unidades de a^n es $1, 3, 7$ o 9, para cada natural n. Diga cuándo se da cada uno de estos resultados

Resolución
Sea $a \in \mathbb{N}$ cuyo último digido decimal es 3, es decir, en términos de congruencia, $a \equiv 3\ (10)$. Entonces $a^n \equiv 3^n\ (10)$. Usando que $3^4 = 81 \equiv 1\ (10)$ (cosa que podíamos percatarnos también por Fermat-Euler, pues 3 es coprimo con 10 y $\varphi(10) = 4$), y escribiendo $n = 4q_n + r_n$, con $0 \leq r_n \leq 3$, se tiene que

$$a^n \equiv 3^n = 3^{4q_n + r_n} \equiv 3^{r_n} \equiv \begin{cases} 1\ (10) & \text{si } r_n = 0 \Longleftrightarrow n \equiv 0\ (4) \\ 3\ (10) & \text{si } r_n = 1 \Longleftrightarrow\ n \equiv 1\ (4) \\ 9\ (10) & \text{si } r_n = 2 \Longleftrightarrow\ n \equiv 2\ (4) \\ 7\ (10) & \text{si } r_n = 3 \Longleftrightarrow\ n \equiv 3\ (4) \end{cases}$$

Resolución del Ejercicio 4

Determinar los $z \in \mathbb{Z}$ tales que $|z| = \frac{1}{|z|} = |1 - z|$.

Resolución
La primera igualdad simplemente se traduce en que $|z| = 1$, y así, la segunda igualdad se traduce en que $|z - 1| = 1$. Luego, el conjunto de complejos en cuestión es la intersección de las circunsferencias unitarias de centros 0 y 1. Hallemos dicha intersección: para $|z| = 1$, tenemos que

$$1 = |z-1| = \underbrace{|z|^2}_{=1} + 1 - 2\Re(z) \iff 1 = 2(1 - \Re(z)) \iff \frac{1}{2} = 1 - \Re(z) \iff \Re(z) = \frac{1}{2} \underset{|z|^2=1}{\iff} z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Así, el conjunto buscado es $\{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\} = \{\cos(\frac{\pi}{3}) \pm i \sin(\frac{\pi}{3})\}$ (las raíces sextas primitivas de la unidad)

Resolución del Ejercicio 5

> Sea $P \in \mathbb{R}[X]$. Suponga que el resto de dividir a P por $X-1$ es a, y el resto de dividir a P por $X-2$ es b. ¿Cuál es el resto de dividir a P por $(X-1)(X-2)$?

Resolución
Tenemos que

$$\begin{cases} P \equiv a \pmod{X-1} \\ P \equiv b \pmod{X-2} \end{cases}$$

De la primer congruencia, sacamos que $P = (X-1)q + a$, para algún $q \in \mathbb{R}[X]$. Susitituimos en la segunda ecuación, y obtenemos que

$$(\underbrace{X}_{\equiv 2} - 1)q + a \equiv b \pmod{X-2}, \iff q \equiv b - a \pmod{X-2}$$

, de modo que $q = (X-2)h + b - a$ para cierto $h \in \mathbb{R}[X]$, y entonces

$$\begin{aligned} P &= (X-1)((X-2)h + b - a) + a \\ &= (X-1)(X-2)h + (X-1)(b-a) + a \\ &= (X-1)(X-2)h + (b-a)X + 2a - b \end{aligned}$$

Luego, el resto de dividir P por $(X-1)(X-2)$ es $(b-a)X + 2a - b$.

4.7 23/07/2013

Enunciados del examen

1) Pruebe que la sucesión de Fibonacci

$$a_1 = a_2 = 1$$
$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \text{ para } n \geq 2$$

satisface que $a_n a_{n+1} - a_{n-1} a_n = a_n^2$ para todo $n \geq 2$. Use esto para probar que

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 = a_n a_{n+1} \text{ para todo } n \geq 1$$

2) En un test de 20 preguntas con dos opciones cada pregunta. ¿De cuántas formas pueden marcarse las respuestas para que resulten:

   a) 7 respuestas correctas (y trece equivocadas)

   b) Al menos 17 respuestas correctas

3) Un grupo de 17 piratas se repartió por partes iguales una cantidad de monedas de oro, todas del mismo valor, y sobraron 3. Después de pelear por éstas, uno de ellos fue asesinado. Al repartir de nuevo el total de las moneda, sobraban 10, y de nuevo lucharon por ellas y uno de ellos resultó muerto. Luego de eso, pudieron repartirse las monedas en forma equitativa, sin que sobre ninguna.
¿Cuál es el mínimo número posible de monedas que tenían?

4) Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Pruebe que

$$w := \frac{z+1}{z-1} \text{ es imaginario puro si y solo si } |z| = 1$$

5) Hallar $a, b \in \mathbb{C}$ tales que los polinomios

$$f = X^3 + aX^2 + 11X + 6 \text{ y } g = X^3 + bX^2 + 14X + 8$$

tengan un factor común de la forma $X^2 + pX + q$.

Resolución del Ejercicio 1

Pruebe que la sucesión de Fibonacci

$$a_1 = a_2 = 1$$
$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \text{ para } n \geq 2$$

satisface que $a_n a_{n+1} - a_{n-1}a_n = a_n^2$ para todo $n \geq 2$. Use esto para probar que

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 = a_n a_{n+1} \text{ para todo } n \geq 1$$

Resolución
En efecto, dado $n \geq 2$, tenemos que

$$a_n a_{n+1} - a_{n-1}a_n = a_n(a_n + a_{n-1}) - a_{n-1}a_n = a_n^2 + \cancel{a_n a_{n-1} - a_{n-1}a_n} = a_n^2$$

Llamando $b_n = a_{n-1}a_n$ (donde $n \geq 2$), tenemos entonces que $b_{n+1} - b_n = a_n^2$ para todo $n \geq 2$, de modo que para todo $n \geq 1$, se tiene

$$a_n a_{n+1} = b_{n+1} = (b_{n+1} - b_2) + b_2 = \underbrace{1}_{=a_1^2} + \sum_{i=2}^{n} \underbrace{(b_{i+1} - b_i)}_{=a_i^2} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

, como queríamos probar.

Resolución del Ejercicio 2

En un test de 20 preguntas con dos opciones cada pregunta. ¿De cuántas formas pueden marcarse las respuestas para que resulten:

a) 7 respuestas correctas (y trece equivocadas)

b) Al menos 17 respuestas correctas

Resolución
a) Tenemos que elegir 7 de las 20 preguntas que estarán correctas, de modo que hay $\binom{20}{7}$ maneras de responder al test, con exactamente 7 respuestas correctas.

b) Por complemento: la cantidad de maneras de responder al test es 2^{20}. La cantidad de maneras de responder al test de modo que haya exactamente k respuestas correctas, con $0 \leq k \leq 16$, es $\binom{20}{k}$. Por ende, la cantidad de maneras de responder al test de modo que haya al menos 17 respuestas correctas es:

$$2^{20} - \sum_{k=0}^{16} \binom{20}{k} = \binom{20}{17} + \binom{20}{18} + \binom{20}{19} + \binom{20}{20} + \underbrace{2^{20} - \underbrace{\sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k}}_{=2^{20}}}_{=0}$$

$$= \binom{20}{0} + \binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \binom{20}{3} = 1351$$

Y en efecto, decir que hay al menos 17 respuestas correctas es lo mismo a decir que la cantidad de respuestas incorrectas es a lo sumo 3, que es lo mismo a decir que hay exactamente k respuestas incorrectas, para algún $0 \leq k \leq 3$.

Resolución del Ejercicio 3

> Un grupo de 17 piratas se repartió por partes iguales una cantidad de monedas de oro, todas del mismo valor, y sobraron 3. Después de pelear por éstas, uno de ellos fue asesinado. Al repartir de nuevo el total de las moneda, sobraban 10, y de nuevo lucharon por ellas y uno de ellos resultó muerto. Luego de eso, pudieron repartirse las monedas en forma equitativa, sin que sobre ninguna.
> ¿Cuál es el mínimo número posible de monedas que tenían?

Resolución
Si n es la cantidad de monedas, tenemos que

$$\begin{cases} n \equiv 3 \pmod{17} \\ n \equiv 10 \pmod{16} \\ n \equiv 0 \pmod{15} \end{cases}$$

(por el teorema chino del resto, sabemos que este sistema tiene solución en $\mathbb{N}$, pues $17, 16$ y 15 son todos coprimos). De la primera ecuación, sacamos que $n = 17q + 3$. Sustituimos en la segunda y obtenemos que $\underbrace{17}_{\equiv 1} q + 3 \equiv 10 \pmod{16}$, o sea, $q \equiv 7 \pmod{16}$, de modo que $q = 16k + 7$, y entonces

$$n = 17(16k + 7) + 3 = 16 \times 17k + 122$$

Sustituimos en la tercer ecuación y nos queda que

$$\underbrace{16}_{\equiv 1} \times \underbrace{17}_{\equiv 2} k + \underbrace{122}_{\equiv 2} \equiv 0 \pmod{15}, \iff 2k \equiv -2 \pmod{15} \underset{8\times 2\equiv 1}{\iff} k \equiv -16 \pmod{15}$$
$$\iff k \equiv 14 \pmod{15}$$

, de modo que $k = 15h + 14$, y entonces

$$n = 17 \times 16(15h + 14) + 122 = (17 \times 16 \times 15)h + 3930 = 4080h + 3930$$

Luego, el mínimo número posible de monedas que tenían los piratas es 3930.

Resolución del Ejercicio 4

> Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Pruebe que
> $$w := \frac{z+1}{z-1} \text{ es imaginario puro si y solo si } |z| = 1$$

Resolución
En efecto, tenemos que

$$w \text{ es imaginario puro } \iff \underbrace{\Re(w)}_{=\frac{w+\overline{w}}{2}} = 0 \iff w = -\overline{w} \iff \frac{z+1}{z-1} = -\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}$$
$$\iff (z+1)(\overline{z}-1) = -(z-1)(\overline{z}+1) \iff |z|^2 \cancel{-z+\overline{z}} - 1 = -|z|^2 \cancel{-z+\overline{z}} + 1$$
$$\iff 2|z|^2 = 2 \iff |z| = 1$$

Resolución del Ejercicio 5

Hallar $a, b \in \mathbb{C}$ tales que los polinomios

$$f = X^3 + aX^2 + 11X + 6 \text{ y } g = X^3 + bX^2 + 14X + 8$$

tengan un factor común de la forma $X^2 + pX + q$.

Resolución
Teniendo en cuenta que $X^2 \equiv -pX - q \pmod{X^2 + pX + q}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
f \equiv 0 \pmod{X^2+pX+q} &\iff X(-pX-q) + a(-pX-q) + 11X + 6 \equiv 0 \pmod{X^2+pX+q}\\
&\iff -pX^2 + (11-q-ap)X + 6 - aq \equiv 0 \pmod{X^2+pX+q}\\
&\iff -pX^2 + (11-q-ap)X + 6 - aq = -p(X^2+pX+q)\\
&\text{o } -pX^2 + (11-q-ap)X + 6 - aq = 0\\
&\iff \begin{cases} -p^2 = 11 - q - ap \\ -pq = 6 - aq \end{cases} \quad \text{o } p = 0,\ q = 11 \text{ y } a = \frac{6}{11}\\
&\iff \begin{cases} ap = 11 - q + p^2 \\ aq = 6 + pq \end{cases} \quad \text{o } p = 0, q = 11 \text{ y } a = \frac{6}{11}
\end{aligned}$$

Del mismo modo,

$$\begin{aligned}
g \equiv 0 \pmod{X^2+pX+q} &\iff X(-pX-q) + b(-pX-q) + 14X + 8 \equiv 0 \pmod{X^2+pX+q}\\
&\iff -pX^2 + (14-q-bp)X + 8 - bq \equiv 0 \pmod{X^2+pX+q}\\
&\iff -pX^2 + (14-q-bp)X + 8 - bq = -p(X^2+pX+q)\\
&\text{o } -pX^2 + (14-q-bp)X + 8 - bq = 0\\
&\iff \begin{cases} -p^2 = 14 - q - bp \\ -pq = 8 - bq \end{cases} \quad \text{o } p = 0, q = 14 \text{ y } b = \frac{4}{7}\\
&\iff \begin{cases} bp = 14 - q + p^2 \\ bq = 8 + pq \end{cases} \quad \text{o } p = 0, q = 14 \text{ y } b = \frac{4}{7}
\end{aligned}$$

Vemos en particular que si $X^2 + pX + q$ divide a f y g, no puede ocurrir que $p = 0$ o $q = 0$, y tampoco puede ocurrir que $a = b$
Nos queda que $X^2 + pX + q$ divide a f y g si y solo si

$$\begin{cases} ap = 11 - q + p^2 \\ aq = 6 + pq \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} bp = 14 - q + p^2 \\ bq = 8 + pq \end{cases}$$

Si restamos las primeras ecuaciones de ambos sistemas, obtenemos que $(b-a)p = 3$, y si restamos las segundas, obtenemos que $(b-a)q = 2$ (en particular, $a \neq b$), con lo cual

$$\frac{p}{q} = \frac{(b-a)p}{(b-a)q} = \frac{3}{2}, \quad \text{equivalentemente, } p = \frac{3}{2}q$$

Luego, si un factor de grado 2 divide a f y g, entonces es de la forma $X^2 + \frac{3}{2}qX + q$, con $q \neq 0$. Volviendo a los dos sistemas en llaves, tenemos que $X^2 + pX + q$ divide a f y g si y solo si

$$\begin{cases} a = \frac{11}{p} - \frac{q}{p} + p \\ a = p + \frac{6}{q} \end{cases} \text{ y } \begin{cases} b = \frac{14}{p} - \frac{q}{p} + p \\ b = p + \frac{8}{q} \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{11}{p} - \frac{q}{p} + p \\ a = p + \frac{6}{q} \end{cases} \text{ y } \begin{cases} b = a + \frac{3}{p} \\ b = a + \frac{2}{q} \end{cases}$$

$$\underset{\frac{p}{q}=\frac{3}{2}}{\iff} b = a + \frac{2}{q} \text{ y } \underbrace{\begin{cases} a = \frac{11}{\frac{3}{2}q} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2}q \\ a = \frac{3}{2}q + \frac{6}{q} \end{cases}}_{\substack{\text{Los dos 2dos miembros} \\ \text{son iguales sii } q=2}} \iff q = 2, \ (\text{ con lo cual } p = 3), \ a = 6 \text{ y } b = 7$$

En definitiva, f, g tienen un factor común de grado 2 si y solo si $a = 6$ y $b = 7$, en cuyo caso el (único) factor común de grado viene dado por $X^2 + 3X + 2$.

Verifiquemos que para estos valores de a y b, efectivamente $X^2 + 3X + 2$ divide a f y g: dividiendo f por $X^2 + 3X + 2$, tenemos

$$\begin{array}{r|l} X^3 + 6X^2 + 11X + 6 & X^2 + 3X + 2 \\ -X^3 - 3X^2 - 2X & X + 3 \\ \hline 3X^2 + 9X + 6 & \\ -3X^2 - 9X - 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

y dividiendo g, tenemos

$$\begin{array}{r|l} X^3 + 7X^2 + 14X + 8 & X^2 + 3X + 2 \\ -X^3 - 3X^2 - 2X & X + 4 \\ \hline 4X^2 + 12X + 8 & \\ -4X^2 - 12X - 8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Así que efectivamente, $X^2 + 3X + 2$ divide a f y a g.