ALGORITMOS Y ESTRUCTURAS DE DATOS III - 2º Parcial
Fecha examen: 07-JUL-2014 / Fecha notas: 14-JUL-2014

	Nº Orden	Apellido y nombre	L.U.	Cant. hojas[1]
Completar:				
	Nota (Nº)	Nota (Letras)	Docente	
No completar:				

1. Sea G un grafo planar de $n \geq 3$ vértices y $m \geq 3n - 7$ ejes. Demostrar que G es conexo.

2. En nuestro deporte favorito dos equipos juegan en una cancha desplazando una pelota dentro de la misma. Cada equipo tiene un arco y un jugador especial llamado arquero que permanece cerca de su arco. Nuestro equipo está formado por n jugadores, identificados por enteros distintos entre 1 y n; el número 1 identifica a nuestro arquero. Una jugada de gol es una sucesión de movimientos de la pelota dentro de la cancha, donde el primer movimiento (llamado saque de arco) lo realiza el arquero de un equipo, y el último movimiento (llamado gol) produce que la pelota entre en el arco del equipo contrario. Los movimientos de la pelota que no son el gol mismo son pases de la pelota entre jugadores de un mismo equipo. Los jugadores ocupan posiciones relativamente fijas dentro de la cancha, de modo que cada jugador puede pasarle la pelota sólo a ciertos jugadores de su equipo, y no necesariamente todos los jugadores pueden tirar la pelota al arco contrario. Decimos que dos jugadas de gol son independientes si y sólo si no contienen a un mismo movimiento de la pelota.

   Diseñar un algoritmo eficiente basado en grafos que determine la máxima cantidad de jugadas de gol independientes de a pares que puede realizar nuestro equipo. La entrada del algoritmo es la cantidad n de jugadores de nuestro equipo, y para cada jugador la lista de jugadores a los cuales puede pasarles la pelota y la indicación de si puede tirar la pelota al arco contrario. Mostrar que el algoritmo propuesto es correcto y determinar su complejidad. Justificar.

3. Un grafo se dice d-regular si y sólo si todos sus vértices tienen grado d.

   (a) Demostrar que si G es un grafo d-regular con una cantidad impar de vértices entonces G o G^c tienen circuito euleriano.

   (b) Mostrar que la propiedad no es cierta para una cantidad par de vértices. Concretamente, exhibir un grafo d-regular H con una cantidad par de vértices tal que H y H^c (tengan ejes y) no tengan circuito euleriano. Justificar.

4. Demostrar que $\Pi_2 \in$ NP-completo usando que $\Pi_1 \in$ NP-completo.

   Π_1: CAMINO HAMILTONIANO
   Entrada: un grafo G.
   Pregunta: ¿existe un camino que pasa exactamente una vez por cada vértice de G?

   Π_2: ASIGNACIÓN SEPARADA
   Entrada: un grafo H de n vértices.
   Pregunta: ¿es posible asignar a cada vértice de H un entero distinto entre 1 y n de manera tal que vértices adyacentes reciban enteros no consecutivos?

   SUGERENCIA: Asignar equivale a ordenar.

5. Dado un grafo G, se definen

   - $\Delta(G)$ = grado máximo de los vértices de G; y
   - $\nu(G)$ = cantidad de ejes de un matching máximo de G.

   Sea G un grafo de m ejes.

   (a) El siguiente algoritmo toma como entrada al grafo G y produce como salida un conjunto M de ejes.

   $M = \emptyset$
   `mientras` G `tenga ejes`
   `elegir un eje` e `de` G
   $M \leftarrow M \cup \{e\}$
   `eliminar de` G `a` e `y a todos sus ejes incidentes`
   `fin mientras`

   Mostrar que M es un matching de G. Demostrar que si $m \geq 1$ entonces $|M| \geq \lceil m/(2\Delta(G) - 1) \rceil$, y deducir que $\nu(G) \geq \lceil m/(2\Delta(G) - 1) \rceil$.

   (b) Demostrar que $\nu(G) \geq \lceil m/(1 + \Delta(G)) \rceil$.

[1] Incluyendo a esta hoja. Entregar esta hoja junto al examen.