Clase práctica 3 (lógica)
Lógica y Computabilidad

Facundo Carreiro

1. Conjuntos Maximal Consistente

Ejercicio 1. Sea A un conjunto maximal consistente con respecto a FORM_{LP}, si definimos LP' tal que $\mathcal{L}_{LP'} = \mathcal{L}_{LP} \cup \{q\}$ con q una proposición fresca. El conjunto $B = A \cup \{q\}$, ¿será extensible a uno maximal consistente?

Resolución. Primero tenemos que ver que el conjunto B sea consistente ya que si no lo es nunca vamos a poder extenderlo a uno maximal consistente. Supongamos que $A \cup \{q\}$ es inconsistente entonces debe suceder que para algún ψ

$$A \cup \{q\} \vdash \psi \qquad \text{y} \qquad A \cup \{q\} \vdash \neg\psi$$

o equivalentemente

$$A \cup \{q\} \vdash \psi \wedge \neg\psi$$

Como la demostración es finita entonces usa finitos elementos de $A \cup \{q\}$. Existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ tal que

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, q\} \vdash \psi \wedge \neg\psi$$

Observación 1. La demostración *debe* usar la variable proposicional q en algún momento. Supongamos que es falso, entonces

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash \psi \wedge \neg\psi$$

pero eso es absurdo ya que el conjunto original A era consistente.

Observación 2. La variable $q \notin Var(\alpha_i)$ para todo i. Sabemos esto ya que el conjunto A se formó a partir del

Continuando con el ejercicio sabemos que

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, q\} \vdash \psi \wedge \neg\psi$$

y por Teorema de la Deducción vale

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash q \to (\psi \wedge \neg\psi)$$

Ahora tenemos que ver lo siguiente, como tenemos una demostración para $q \to (\psi \wedge \neg\psi)$, en cada paso de la demostración que se use q podemos reemplazar la q por una fórmula φ arbitraria y la demostración seguirá siendo válida. Estrictamente deberíamos reemplazar uniformemente en todos los α_i, en q y en ψ pero no es necesario reemplazar en los α_i ya que por la observación 2 los mismos no cambiarán. Por lo tanto podemos asegurar que vale

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash \varphi \to (\psi' \wedge \neg\psi') \tag{1}$$

donde ψ' es el resultado de reemplazar uniformemente q por φ en ψ. Ahora debemos notar que lo siguiente siempre es cierto

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash \alpha_1 \tag{2}$$

ya que α_1 pertenece al conjunto. Finalmente si instanciamos $\varphi = \alpha_1$ juntando 1 y 2 obtenemos

$$\left.\begin{array}{l}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash \alpha_1 \\ \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash \alpha_1 \to (\psi' \wedge \neg\psi')\end{array}\right\} \Longrightarrow_{\text{MP}} \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash \psi' \wedge \neg\psi'$$

y llegamos a que el conjunto original A es inconsistente lo cual es un absurdo.

Ahora que ya probamos que $B = A \cup \{q\}$ es consistente podemos usar el Lema de Lindenbaum para extender a B a un conjunto $\tilde{B}$ maximal consistente. □

2. Árboles

Ejercicio 2. Decidir si el conjunto

$$C = \{(p \wedge \neg q), (p \to q), (\neg p \to q)\}$$

es satisfacible.

Resolución. Veamos si encontramos una rama abierta en el árbol o si nos quedan todas cerradas.

$$\begin{array}{c}
((p \wedge \neg q) \wedge (p \to q)) \wedge (\neg p \to q) \\
(p \wedge \neg q) \wedge (p \to q) \\
(\neg p \to q) \\
(p \wedge \neg q) \\
(p \to q) \\
p \\
\neg q \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \neg\neg p \\ p \\ \begin{array}{cc} \neg p & q \\ \times & \times \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} q \\ \times \\ \\ \end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Todas las ramas son cerradas por lo tanto es *insatisfacible*. □

3. Axiomática

Ejercicio 3. Recordemos el sistema axiomático SP

$$\begin{array}{ll}
\text{SP1}: & \vdash \alpha \to (\beta \to \alpha) \\
\text{SP2}: & \vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \\
\text{SP3}: & \vdash (\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha) \\
\text{MP}: & \vdash \alpha \text{ y } \vdash \alpha \to \beta \text{ entonces } \vdash \beta
\end{array}$$

a) Demostrar que SP1 es tautología.

b) Mostrar que $\{\varphi \to \psi, \psi \to \theta\} \vdash \varphi \to \theta$, o sea, que a partir de $\{\varphi \to \psi, \psi \to \theta\}$ hay una demostración de $\varphi \to \theta$.

Resolución (a). ¿Qué quiere decir que sea tautología? Que para toda valuación v, $v(\text{SP1}) = 1$. Supongamos que no es el caso, debe existir una valuación v que lo haga 0.

$$v(\alpha \to (\beta \to \alpha)) = 0$$

¿Qué debe cumplirse para que SP1 sea 0? Por definición, una implicación es 0 cuando su antecedente es verdadero y su consecuente falso, entonces

$$v(\alpha) = 1 \text{ y } v(\beta \to \alpha) = 0$$

Ahora aplicando nuevamente el mismo argumento,

$$v(\beta) = 1 \text{ y } v(\alpha) = 0$$

Aquí se puede ver que, de existir tal valuación, debería darse $v(\alpha) = 1$ y $v(\alpha) = 0$ al mismo tiempo. Absurdo. □

Resolución 1 (b). Recordemos que una demostración de $\Gamma \vdash \varphi$ es una lista finita de elementos tal que cada elemento cumple alguno de los siguientes items

- Es instancia de un axioma (sustituyendo *uniformemente* cada fórmula por otra arbitraria)
- Es un elemento de Γ (sin posibilidad de sustitución)
- Es *modus ponens* de dos elementos anteriores

y además el último elemento en la lista es φ.
Intentemos dar una demostración siguiendo ese esquema

1. $(\psi \to \theta) \to (\varphi \to (\psi \to \theta))$ (SP1: $\alpha \mapsto (\psi \to \theta), \beta \mapsto \varphi$)
2. $\psi \to \theta$ (del conjunto de hipótesis)
3. $(\varphi \to (\psi \to \theta))$ (MP: 1,2)
4. $(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$ (SP2: $\alpha \mapsto \varphi, \beta \mapsto \psi, \gamma \mapsto \theta$)
5. $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta)$ (MP: 3,4)
6. $\varphi \to \psi$ (del conjunto de hipótesis)
7. $\varphi \to \theta$ (MP: 5,6)

Es muy dificil poder dar demostraciones de este estilo ya que puede no haber ninguna intuición de por dónde empezar a instanciar los axiomas para llegar a lo que uno quiere. Lo positivo de *tener* una demostración escrita de esta manera es que es muy facil ver si es correcta o tiene errores. □

Resolución 2 (b). Para sufrir menos al realizar estas demostraciones (pero no mucho menos) recordemos que tenemos a nuestra disposición el siguiente teorema

Teorema 3 (Teorema de la deducción)**.** Si $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

Eso quiere decir que si logramos demostrar ψ usando Γ y φ como hipótesis entonces tambien existe una demostracion de $\varphi \to \psi$ usando sólo Γ como hipótesis. Nosotros tenemos que demostrar $\{\varphi \to \psi, \psi \to \theta\} \vdash \varphi \to \theta$, intentemos demostrar $\{\varphi \to \psi, \psi \to \theta, \varphi\} \vdash \theta$ y luego usar el teorema de la deducción.

1. $\psi \to \theta$ (del conjunto de hipótesis)
2. $\varphi \to \psi$ (del conjunto de hipótesis)
3. φ (del conjunto de hipótesis)

4. ψ (MP: 2,3)

5. θ (MP: 1,4)

De esta manera tenemos que $\{\varphi \to \psi, \psi \to \theta, \varphi\} \vdash \theta$, usando el teorema de la deducción concluimos que $\{\varphi \to \psi, \psi \to \theta\} \vdash \varphi \to \theta$. Como vemos esta demostración fue mucho más facil ya que "el trabajo sucio" fue realizado por el teorema. $\square$

4. Compacidad

Ejercicio 4. Dados $\{\Gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que Γ_i es satisfacible y $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$. ¿$\Gamma^\infty = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i$ es satisfacible?

Resolución (1). Supongamos que Γ^∞ es insatisfacible entonces por compacidad existe un conjunto *finito* $\Delta \subseteq \Gamma^\infty$ tal que Δ es insatisfacible. Como Δ es finito entonces contiene finitos elementos de Γ^∞, por lo tanto usando la hipótesis existe un Γ_k que contiene a todo Δ y posiblemente un poco más. Este Γ_k es satisfacible por hipótesis así que llegamos a un absurdo. $\square$

Resolución (2). Vamos a probar que todo subconjunto finito es satisfacible entonces por compacidad Γ^∞ será satisfacible. Tomemos un conjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma^\infty$, como es finito y está incluido en Γ^∞ entonces existe un Γ_k que contiene a todo Δ. Este Γ_k es satisfacible y como $\Delta \subseteq \Gamma_k$ entonces Δ es satisfacible. Al haber tomado un Δ genérico probamos que todo subconjunto finito de Γ^∞ es satisfacible entonces por compacidad Γ^∞ es satisfacible. $\square$

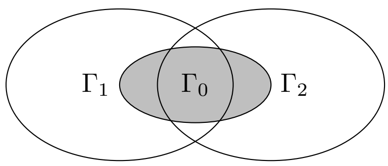
Ejercicio 5. Sean Γ_1, Γ_2 satisfacibles, tal que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfacible. Mostrar que existe un φ tal que $\Gamma_1 \models \varphi$ y $\Gamma_2 \models \neg\varphi$.

Resolución. Sabemos que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfacible, entonces por compacidad debe existir un $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ insatisfacible *finito*.

Observación 4. Γ_0 no está completamente incluido en Γ_1 ni en Γ_2. Si así fuera entonces Γ_1 y Γ_2 serían insatisfacibles ya que contienen un conjunto insatisfacible.

Observación 5. Γ_0 no está completamente incluido en $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Si así fuera entonces estaría incluido en ambos conjuntos y ya vimos en la observación anterior que no puede suceder.

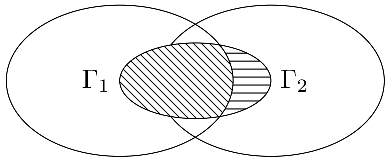
Entonces la relación entre los conjuntos debe ser la siguiente, Γ_0 tiene elementos tanto de Γ_1, Γ_2 inclusive algunos que no están en su intersección.



Podemos dividir a Γ_0 como

$$\Gamma_0 = \{\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}_{\in \Gamma_1}, \underbrace{\beta_1, \ldots, \beta_m}_{\in \Gamma_2 \setminus \Gamma_1}\}$$

quedando en el siguiente diagrama los α_i como la parte rayada en diagonal y los β_j como la parte rayada horizontalmente.



Siguiendo, sabemos que

$$\Gamma_1 \models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \tag{3}$$

ya que $\alpha_i \in \Gamma_1$. Ahora nos preguntamos, ¿podría suceder que $\Gamma_2 \models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$? La respuesta es **no** ya que como $\Gamma_2 \models \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_m$ si eso sucediera entonces $\Gamma_2 \models \Gamma_0$ pero Γ_2 es satisfacible y Γ_0 no. Podemos concluir que

$$\Gamma_2 \not\models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \tag{4}$$

¿Puede suceder que también $\Gamma_2 \not\models \neg(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)$? Supongamos que si, en tal caso debe haber una valuación v tal que hace verdadera a todo Γ_2, $v(\Gamma_2) = 1$, pero que hace falsa a la fórmula, $v(\neg(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)) = 0$. Esto ultimo es equivalente a decir que $v(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) = 1$. Por lo tanto esta valuación v hace verdadero a todo Γ_2 y también a los α_i. Volviendo a Γ_0 vemos que está compuesto por los α_i y por algunos elementos de Γ_2. Podemos concluir entonces que mi valuación v cumple $v(\Gamma_0) = 0$. Esto es absurdo ya que estabamos suponiendo Γ_0 *insatisfacible.* Podemos concluir que

$$\Gamma_2 \models \neg(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \tag{5}$$

Juntando 3 y 5 podemos concluir que

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_1 & \models & \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \\ \Gamma_2 & \models & \neg(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \end{array}$$

Por lo tanto si tomamos $\varphi = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ tenemos que $\Gamma_1 \models \varphi$ y $\Gamma_2 \models \neg\varphi$ que era lo pedido. $\square$