Parcial de Lógica

Lógica y Computabilidad

2do cuatrimestre de 2010

Este examen se aprueba obteniendo al menos **50 puntos**. El parcial es a libro abierto y se puede suponer demostrado todo lo que se dio en clase, colocando referencias claras. En el caso de usar resultados de las guías de ejercicios, deben incluirse las demostraciones.

Ejercicio 1. (**?? p.**) Dada una familia de *contingencias* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots$ tales que $\mathrm{Vars}(\gamma_i) = \{p_{i+1}\}$ (i.e., la única variable proposicional que aparece en γ_i es p_{i+1}), se define la siguiente traducción:

$$\begin{aligned} f(p_i) &= \gamma_i \\ f(\neg\alpha) &= \neg f(\alpha) \\ f(\alpha \to \beta) &= f(\alpha) \to f(\beta) \end{aligned}$$

Intuitivamente, f reemplaza uniformemente todas las apariciones de p_i por ψ_i. Demostrar que, para toda fórmula α, α es satisfacible si y sólo si $f(\alpha)$ lo es.

Ejercicio 2. (**?? p.**) Sea Γ un conjunto maximal consistente de la lógica proposicional. Demostrar que para todo par de fórmulas α, β sucede $\alpha \to \beta \in \Gamma$ ó $\beta \to \alpha \in \Gamma$.

Ejercicio 3. (**?? p.**) Sea $\mathcal{L} = \{=, \rightsquigarrow\}$ el lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de relación binaria (infijo) $\rightsquigarrow$. Leemos $x \rightsquigarrow y$ como "x se puede reducir a y". Llamamos "Sistema de Reescritura Abstracto' (ARS, por sus siglas en inglés) a cualquier estructura en este lenguaje (i.e., cualquier $\mathcal{L}$-estructura).

Decimos que un elemento e de un ARS es una *forma normal* si no se puede reducir a nada. Decimos también que un ARS $\mathcal{A}$ es *normalizante* si no contiene una sucesión infinita de elementos $e_1, e_2, e_3, \dots$ tal que $e_1 \overset{\mathcal{A}}{\rightsquigarrow} e_2 \overset{\mathcal{A}}{\rightsquigarrow} e_3 \overset{\mathcal{A}}{\rightsquigarrow} \cdots$ ($\overset{\mathcal{A}}{\rightsquigarrow}$ es la interpretación de $\rightsquigarrow$ en $\mathcal{A}$).

I. Dar una $\mathcal{L}$-fórmula $\psi(x)$ con sólo una variable libre x tal que, para todo ARS $\mathcal{A}$ y toda valuación v, $\mathcal{A} \models \psi[v]$ sii $v(x)$ es una forma normal en $\mathcal{A}$.

II. Demostrar que no es posible dar una $\mathcal{L}$-fórmula φ tal que $\mathcal{A} \models \varphi$ sii $\mathcal{A}$ es normalizante.

Ejercicio 4. (**?? p.**) Sea Γ un conjunto *consistente* de sentencias de primer orden. Decimos que la teoría Γ es "completa respecto a la negación" si para toda *sentencia* φ, $\Gamma \vdash \varphi$ ó $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Decidir en cada caso si la afirmación es verdadera ó falsa y justificar.

I. Si Γ es completa respecto a una clase de modelos $\mathcal{C}$, Γ es completa respecto a la negación.

II. Si Γ es completa respecto a un modelo $\mathcal{M}$, Γ es completa respecto a la negación.

III. Si Γ es computable y completa respecto a la negación, $\{\varphi \mid \Gamma \models \varphi\}$ también es computable.