

Álgebra 1

Examen final

11 de junio, 2021

NOMBRE: LIBRETA:

CARRERA:

1	2	3	4	5	Calificación

1. Demuestre por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{4n}.$$

2. ¿Cuántos anagramas tiene la palabra VIRTUALIDAD en los que no hay dos consonantes juntas?
3. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $(4n^{49} + n + 33 : 442) = 221$. Calcule el resto de la división de n por 442.
4. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. En el conjunto $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ de los números complejos no nulos definimos una relación \sim de manera que

$$z \sim w \iff \text{existe } \alpha \in G_n \text{ tal que } z = \alpha w.$$

- (a) Pruebe que \sim es una relación de equivalencia.
- (b) Encuentre explícitamente la clase de equivalencia del complejo $z = 3 + 5i$ respecto a la relación \sim cuando $n = 4$.
5. Consideramos el polinomio

$$P = x^6 + x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 4x + 4$$

- (a) Encuentre la factorización de P en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ como producto de polinomios irreducibles, sabiendo que una de las raíces de P es una raíz cúbica primitiva de la unidad.
- (b) Determine las raíces de P en \mathbb{C} y sus respectivas multiplicidades.