ALGORITMOS Y ESTRUCTURAS DE DATOS III
Final / 09-FEB-2021

1. [2.5 puntos]

   (a) La excentricidad de un nodo $v \in V$ es la longitud del camino simple más largo que puede construirse a partir de v. Enunciar un algoritmo, para determinar la excentricidad de los vértices de un grafo dado. Determinar su complejidad.

   (b) El radio $r(G)$ y el diametro $d(G)$ de un grafo G se definen como el mínimo y el máximo valor respectivamente de las excentricidades de los vértices de G. Probar que:

   $$d(G)/2 \leq r(G) \leq d(G)$$

   para todo grafo G. Mostrar grafos en los que se verifiquen las igualdades.

2. [2.5 puntos] Considerar el siguiente problema: se debe viajar en automóvil desde el kilómetro 0 al kilómetro M de una ruta. Se dispone de la lista de estaciones de servicio $e_1, \ldots e_k$ a lo largo del camino, identificadas cada una por su distancia x_i del kilómetro 0 para $i = 1, \ldots, k$ (no hay dos estaciones de servicio en el mismo kilómetro). Sabiendo que con un tanque de nafta lleno se pueden realizar hasta K kilómetros, se desea saber en qué estaciones de servicio será necesario cargar nafta con el objetivo de minimizar el número total de detenciones.

   (a) Proponer un algoritmo goloso que resuelva el problema y demostrar su correctitud.

   (b) Calcular la complejidad del algoritmo propuesto.

3. [2.5 puntos] Considerar el flujo máximo de una red dada entre los nodos s y t. Para cada una de las siguientes sentencias, explicar por qué es verdadera o dar un contraejemplo.

   (a) Si la capacidad de todo arco es par, entonces el valor del flujo máximo debe ser par.

   (b) Si la capacidad de todo arco es par, entonces existe un flujo máximo en el cual el flujo sobre cada arco es par.

   (c) Si la capacidad de cada arco es impar, entonces el valor del flujo máximo debe ser impar.

   (d) Si la capacidad de todo arco es impar, entonces existe un flujo máximo en el cual el flujo sobre cada arco es impar.

4. [2.5 puntos] Considerar los siguientes dos problemas de decisión:

   - Dado un grafo $G = (V, E)$ con pesos positivos en sus aristas, un entero positivo k y dos nodos distinguidos $s, t \in V$, ¿hay un camino simple entre s y t de longitud al menos k?
   - Dado un grafo $G = (V, E)$ con pesos positivos en sus aristas, un entero positivo k y dos nodos distinguidos $s, t \in V$, ¿hay un camino simple entre s y t de longitud a lo sumo k?

   ¿A qué clase de complejidad pertenece cada uno de estos problemas? Justificar la respuesta (describiendo un algoritmo polinomial para el caso de que el problema esté en P, y demostrándolo para el caso que el problema esté en NP-completo).