Apuntes COBY - Algoritmos y Estructuras de Datos III

14 de diciembre de 2014

Índice

1. Practica 8

1.1. Demostraciones

Lo importante de las demostraciones es **(1)** Entender por que tiene que pasar lo que piden demostrar **(2)** Una vez visto eso tratar de explicarlo traduciendo la idea con lenguaje matematico (nada mas una traduccion que sirve de herramienta, lo importante es explicar claro lo visto en **(1)**)

1.2. Euler

1. Un circuito Euleriano es un circuito que recorre cada arista una unica vez. Un multigrafo es euleriano si tiene un circuito euleriano.
2. *Teorema:* Son equivalentes para un (multi)grafo conexo:
    a) G es Euleriano.
    b) Todo vertice de G tiene grado par.
    c) Las aristas de G pueden particionarse en circuitos.
3. Un camino euleriano es un camino que recorre cada arista una unica vez.
4. Un digrafo es euleriano si tiene un circuito orientado que pasa por cada arco exactamente una vez.
5. *Teorema:* Un (multi)grafo tiene camino euleriano si y solo si todos sus vertices tienen grado par salvo dos (principio y fin).
6. *Teorema:* Un digrafo conexo es euleriano si y solo si para todo vertice v de G se cumple $d_{in}(v) = d_{out}(v)$

1.3. Hamilton

1. Un camino/circuito hamiltoneano en un grafo G es un camino/circuito que recorre cada vertice una sola vez.
2. Un grafo es hamiltoneano si tiene circuito hamiltoneano.
3. *Teorema:* (Condicion necesaria) Sea G un grafo conexo. Si existe $W \subset V$ tal que $G \setminus W$ tiene c componentes conexas con $c > |W|$ entonces G no es hamiltoneano. $|W| = n(W) = |V(W)|$
4. *Teorema:* (Dirac; Cond. suficiente) Sea G un grafo con $n \geq 3$ y para todo $v \in V$ se cumple $d(v) \geq \frac{n}{2}$
5. *Propiedad:* G grafo con recurrencia grafica $(d_1, ..., d_n)$ con $d_1 \leq ... \leq d_n$ y $n \geq 3$. Si no existe $k < \frac{n}{2}$ tal que $d_k \leq k$ y $d_{n-k} \leq n - k$, entonces G es hamiltoneno.
6. *Teorema:* (Ore, Cond. suficiente) $G = (V, E)$, $|V| = n \geq 3$ y para todo par de vertices $v, w \in V$ no adyacentes se cumple $d(v) + d(w) \geq n \Rightarrow G$ es hamiltoneno.
7. Todo circuito hamiltoneano es simple por que no pasa dos veces por el mismo nodo.

8. Para demostrar que un grafo es Hamiltoneano o Euleriano se puede hacer un algoritmo que devuelva el circuito y explicar por que es correcto.

9. "Pigeon hide principle": if n items are put into m pigeonhides with $n > m$, then at least one pigeonhide must contain more than one item.

2. Practica 9

2.1. Planaridad

1. Una representacion planar de un grafo G es un conjunto de puntos en el plano que se corresponden con los vertices de G unidos por curvas que se corresponden con las aristas de G, sin que estas se crucen entre si.

2. Un grafo es planar si admite representacion planar.

3. Una region de una rep. planar de G es el conjunto de todos los puntos alcanzables desde un punto (que no sea un vertic e ni parte de una arista) sin atravesar vertices ni aristas.

4. Toda representacion planar de un grafo tiene exactamente una region de area infinita, la region exterior.

5. La frontera de una region es el circuito que rodea a la region (puede tener vertices y aristas repetidas)

6. El grado/tamaño de una region es el nro. de aristas que tiene su frontera.

7. K_5 es el grafo no planar con menos n; $K_{3,3}$ es el no planar de menos m.

8. *Propiedad:* Si un grafo contiene un subgrafo no planar, es no planar.

9. Subdividir una arista $e = (v, w)$ consiste en agregar $u \notin V$ a G y reemplazar e por dos aristas $e' = (v, u) y e'' = (u, w)$

10. Un grafo G' es subdivision de G si puede obtenerse subdividiendo a G.

11. $G y G'$ son homeomorfos si hay isomorfismo entre alguna subdivision de G con alguna de G'.

12. *Teorema:* (Kuratowski) Un grafo es planar $\iff$ no contiene ningun subgrafo homeomorfo a $K_5 o K_{3,3}$.

13. *Propiedad:* Si un grafo G tiene un subgrafo homeomorfo a un grafo no planar entonces G es no planar.

14. G planar $\Rightarrow$ toda comp conexa de G es planar y todo subgrafo es planar.

15. *Propiedad:* La planaridad es invariante bajo homeomarfismo.

16. *Propiedad:* G' subdivision de G, entonces G es planar $\iff$ G' es planar.

17. Contraer una arista $e = (v, w)$ consiste en eliminar e del grafo y considerar sus extremos como un vertice $u \notin V$ quedando como aristas incidentes a u las incidentes a v y w.

18. G' es contraccion de G si se puede obtener haciendo contracciones de G.

19. *Teorema:* (Whitney) G es planar $\iff$ no contiene subgrafo contraible a $K_5 o K_{3,3}$.
20. *Teorema:* (Euler) G conexo planar, una representacion planar de G tiene $r = m - n + 2$ regiones en el plano.
21. *Corolario:* G simple, conexo, planar $n \geq 3 \Rightarrow m \leq 3n - 6$
22. *Corolario:* G simple, conexo, bipartito, planar $n \geq 3 \Rightarrow m \leq 2n - 4$
23. $G*$ es el grafo dual de G planar, tiene un vertice por cada region de G y una arista uniendo dos vertices correspondientes a dos regiones r_1 y r_2 por cada arista en la frontera r_1 y r_2 en G.
24. Al subdividir una arista se agregar nodos de grado 2
25. Cualquier arbol es planar.
26. *Propiedad:* G conexo, planar, simple $n \geq 3 \Rightarrow$ el tamaño de la frontera de cada region es mayor o igual a 3.
27. El grafo dual de un grafo dual de G es G (G conexo).
28. los grafos 3-conexos tienen una unica representacion planar.
29. un grafo k-conexo cuando se le pueden sacar cualquier k nodo y seguir siendo conexo.
30. si G es planar $\Rightarrow$ $\sum_{f \in F} |f| = 2m$ (los tamaños de todas las fronteras) Recordar $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$

3. Practica 10

3.1. Coloreo

1. Un coloreo valido de los nodos de un grafo $G = (V, E)$ es una asignacion $f : V \to C$ tal que $f(u) \neq f(v)$ $\forall (u, v) \in E$. Un k-coloreo de G es un coloreo que usa exactamente k colores. Un grafo es k-coloreable si existe un k-coloreo de G, $\chi(G) = k$.
2. el numero cromatico de $G, \chi(G)$ es el menor numero de colores necesarios para colorear los nodos de G.
3. *Proposicion:* H subgrafo de $G \Rightarrow \chi(H) \leq \chi(G)$.
4. Una clique es un subgrafo completo maximal. El numero clique $\omega(G)$ es el numero de nodos de la clique maxima.
5. Para cualquier grafo $G, \chi(G) \geq \omega(G)$
6. $\chi(K_n) = n$
7. G bipartito con $m > 0$ entonces $\chi(G) = 2$.
8. H_{2k} es un circuito simple par entonces $\chi(H_{2k}) = 2$.
9. H_{2k+1} es un circuito simple par entonces $\chi(H_{2k+1}) = 3$.
10. T es un arbol con $n > 1$ entonces $\chi(G) = 2$.

11. Si $\Delta(G)$ es el grado maximo de G entonces $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$
12. *Teorema:* (Brooks) G conexo, no completo, no circuito simple entonces $\chi(G) \leq \Delta(G)$
13. Lema: en todo $\Delta(G)$-coloreo de $G - v$ los vecinos de v en G usan todos los colores y $d(v) = \Delta(G)\ \forall v \in V$.
14. $N(v) = v_1, ..., v_{\Delta(G)}$ es la vecindad de v.
15. $\Delta(G)$-coloreo de $G - v$ donde v_i tiene color i. Para $i \neq j$, H_{ij} es el subgrafo inducido por los nodos de $G - v$ pintados con i o j en ese $\Delta(G)$-coloreo.
16. Lema: v_i y v_j pertenecen a la misma comp. conexa de H_{ij}
17. Lema: P_{ij} comp. conexa de H_{ij} que contiene a v_i y $v_j \Rightarrow P_{ij}$ camino en H_{ij}.
18. $P_{ij} \cap P_{jk} = v_i$ para colores i, j, k distintos.
19. *Teorema:* (Haken) G grafo planar $\Rightarrow \chi(G) \leq 4$.
20. *Teorema:* (Heawood) G grafo planar $\Rightarrow \chi(G) \leq 5$.
21. Coloreo de grafos es NP-C.
22. Grafos de Mycielski: M_i tiene p nodos, M_{i+1} tiene $2p+1$ nodos (los v_i de M_i, w_i nuevos uno por cada v_i y un nodo z y aristas: las de M_i mas aristas entre w_i y z mas aristas de cada w_i con su par de v_i) $\chi(M_i) = i$, $\omega(M_i) = 2$
23. Si G no es conexo, G^c lo es.
24. si G es q-regular entonces G^c es $(n - 1 - q)$-regular.
25. Si G es completo: $P_G(k) = k(k-1)(k-2)(...)(k-n+1)$
26. Si G no es completo: $P_G(k) = P_{G+e}(k) + P_{G*e}(k)$
27. Un coloreo valido de las aristas de G es una asignacion de colores a las aristas en la cual dos aristas que tienen un nodo en comun tienen distinto color asignado.
28. Indice cromatico $\chi'(G)$ es el numero minimo de colores de un coloreo valido de las aristas.
29. *Teorema:* (Vizing) $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$

4. Practica 11

4.1. Matching

1. Un matching entre los nodos de G es un conjunto $M \subseteq X$ de aristas de G tal que para todo $v \in V$, v incide a lo sumo a una arista $e \in M$
2. Un Conjunto independiente (CI) de nodos de G es un conjunto de nodos $I \in V$ tal que para toda arista $e \in X$, e incide a lo sumo a un nodo $v \in I$.
3. Un recubrimiento de los nodos de G (RN) es un conjunto R_m de aristas tal que todo $v \in V$ es incidente al menos a una arista $e \in R_m$.
4. Lema: $S \subseteq V$ es un CI $\iff$ $V \setminus S$ es un RA.
5. Un nodo v se dice saturado por un matching M si hay una arista de M incidente a v.
6. Dado un Matching M en G, un camino alternado en G con respecto a M es un camino simple donde se alternan las aristas de $X \setminus M$ con aristas M.
7. Dado un Matching M en G, un camino de aumento en G respecto de M es un camino alternado entre nodos no saturados por M.
8. Lema: M_0 y M_1 dos matchings en G y sea $G' = (V, X')$ con $X' = M_0 \setminus M_1 \cup M_1 \setminus M_0$, entonces las componntes conexas de G' son: nodos aislados, circuitos simple con aristas alternadamente en M_0 y M_1 o camino simple con aristas alternadamente en M_0 y M_1.
9. *Teorema:* M matching maximo de G $\iff$ no existe camino de aumento en G con respecto a M.
10. *Teorema:* G sin nodos aislados, M matching maximo y R_m recubrimiento minimo de nodos, entonces $|M| + |R_m| = n$
11. *Teorema:* Si I es un CI maximo de G y R_n un recubrimiento minimo de aristas de G $\Rightarrow |I| + |R_n| = n$.
12. Sea M un matching maximo en G, entonces los nodos no saturados por M son U con $|U| = n - 2|M|$. U es un CI por que M es maximo.

4.2. Flujo

1. Una red $N = (V, X)$ es un grafo orientado conexo que tiene dos nodos distinguidos una fuente s, con grado de salida positivo, y un sumidero t, con grado de entrada positivo.
2. Un flujo factible en una red $N = (V, X)$ con funcion de capacidad $c : X(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una funcion $f : X(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $0 \leq f(e) \leq c(e)$ $\forall$ arco $e \in X(G)$.

   $\sum_{e \in In(v)} f(e) = \sum_{e \in Out(v)} f(e)$ para todo nodo $v \in V \setminus s, t$ hay conservacion de flujo.
3. El valor de flujo es $F = \sum_{e \in In(t)} f(e) - \sum_{e \in Out(t)} f(e) = \sum_{e \in Out(s)} f(e) - \sum_{e \in In(s)} f(e)$
4. Un corte en la red $N = (V, X)$ es un subconjunto $S \subseteq V$ tal que $s \in S$ y $t \notin S$
5. Dados $S, T \subseteq V$, conjunto $ST = (u \to v) \in X : u \in Syv \in T$
6. f flujo en $N = (V, X)$ y S un corte de N $\Rightarrow F = \sum_{e \in SS^c} f(e) - \sum_{e \in S^c S} f(e)$

7. capacidad de un corte S es $c(S) = \sum_{e \in SS^c} c(e)$
8. f flujo con valor F y S corte de N $\Rightarrow F \leq c(S)$
9. Corolario: F valor de un flujo de f de N y S un corte de N tal que $F = c(S) \Rightarrow$ f define dlujo maximo y S es corte de capacidad minima.
10. $N = (V, X)$ con funcion de capacidad c y flujo factible f definimos la red residual $R(N, f) = (V, X_R)$ con $\forall (v \to w) \in X$,

    $\exists (v \to w) \in X_R$ si $f(v \to w) < c(v \to w)$ $\exists (w \to v) \in X_R$ si $f(v \to w) > 0$
11. Un camino de aumento es un camino orientado P de s a t en $R(N, f)$.
12. *Teorema:* f flujo definido sobre N, entonces f es un flujo maximo $\iff$ no ha camino de aumento en $R(N, f)$.
13. *Teorema:* En una red N el valor del flujo maximo es igual a la capacidad del corte minimo.
14. Flujo maximo es P.
15. Complejidad Ford-Fulkerson $O(mnB)$ B cota superior para capacidades. (devuelve flujo maximo y corte minimo).
16. Complejidad Edmond y Karp $O(m^2n)$ (BFS de camino de Aumento para marcar nodos)

5. Practica 12

5.1. P-NP

1. Un algoritmo eficiente es un algoritmo de complejidad polinomial. Un problema esta bien resuelto si se conocen algoritmos eficientes para resolverlo.
2. Se estudian problemas de decision cuya respuesta es "si" o "no". Se puede extender a problemas de minimizacion (existe solucion menor que k?) o de maximizacion (solucion mayor que k).
3. Un problema es intratable si no puede ser resuelto por un algoritmo eficiente (por que es indecidible; por que la respuesta es exponencial; por que no se conocen mejores algoritmos.)
4. Un problema esta en P si existe una MTD de complejidad polinomial que lo resuelve (para toda instancia termina y contesta bien "si" o "no")
5. Un problema esta en NP si existe MTND polinomial que lo resuelve (toda instancia del problema con respuesta "si" tiene alguna rama que tiene una respuesta "si" y las instancias de "no" ninguna rama llega a "si")
6. Un problema esta en NP si dada una instancia de "si" y un certificado de la misma, puede ser verificada en tiempo polinomial. Certificado de tamaño polinomial.
7. Reduccion polinomial: Π_1 y Π_2 dos problemas de decision. Decimos que f : Instancias(Π_2) $\to$ Instancias(Π_1) es reduccion polinomial de Π_2 en Π_1 si f es una funcion polinomial y toda instancia I_2 de Π_2 con respuesta "si" cumple $f(I_2)$ tiene respuesta "si" en Π_1. Escribimos $\Pi_2 \leq_p \Pi_1$.

8. la composicion de dos reducciones polinomiales es una reduccion polinomial $\Rightarrow \Pi_1 \leq_p \Pi_2$ y $\Pi_2 \leq_p \Pi_3 \Rightarrow \Pi_1 \leq_p \Pi_3$
9. Un problema Π esta en NP-Completo si: $\Pi \in$ NP, y para todo $\Pi_i \in$ NP, $\Pi_i \leq_p \Pi$
10. Un problema esta en NP-Hard si para todo $\Pi_i \in$ NP, $\Pi_i \leq_p \Pi$.
11. Si existe un problema $\Pi \in$ (NP-C $\cap$ P) entonces $P = NP$
12. Si existe un problema $\Pi \in$ (NP $\setminus$ P) entonces $P \neq NP$
13. *Teorema:* (Cook 1971) SAT es NP-Completo.
14. Para probar que un problema Π_2 es NP-Completo hay que:
    a) $\Pi_2 \in$ NP (dar algoritmo y estructuras)
    b) Elegir problema $\Pi_1 \in$ NP-Completo y construir una reduccion polinomial $\Pi_1 \leq_p \Pi_2$, existe f tal que
        1) f es polinomial
        2) Transforma instancias de Π_1 a Π_2 (dar algoritmo y estructuras)
        3) Para toda instancias I_1 de Π_1 y resp(I_1)="si" $\Rightarrow$ resp($f(I_1)$)="si" (explicar grafos)
        4) Para toda instancias I_1 de Π_1 y resp($f(I_1)$)="si" $\Rightarrow$ resp(I_1)="si"