# Parcial de Lógica

Lógica y Computabilidad

10 marzo 2007

Este examen se aprueba obteniendo al menos **60 puntos**. El parcial es a libro abierto y se puede suponer demostrado todo lo que se dio en clase, colocando referencias claras. En el caso de usar resultados de las guías de ejercicios, se deben incluir las demostraciones.

**Ejercicio 1.** (**20 p**) Un conjunto de fórmulas proposicionales $\Gamma$ es *independiente* si para toda fórmula $\alpha \in \Gamma$ sucede que $\alpha \notin Con(\Gamma - \{\alpha\})$. Sea $\Gamma$ un conjunto independiente infinito. Probar que para todo conjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ el conjunto unitario $\{\bigwedge_{\alpha\in\Gamma_0} \alpha\}$ es independiente.

**Ejercicio 2.** (**25 p**) Para poder decidir la satisfacibilidad de fórmulas de primer orden en un lenguaje con igualdad, vamos a extender el conjunto de reglas para árboles vistas en clase:

$$\mathbf{P}^{=} \quad \frac{\begin{array}{c} P(t_1,\ldots,t_n) \\ \neg P(s_1,\ldots,s_n) \end{array}}{\neg((t_1 = s_1) \wedge \ldots \wedge (t_n = s_n))} \qquad \mathbf{f}^{=} \quad \frac{\neg(f(t_1,\ldots,t_n) = f(s_1,\ldots,s_n))}{\neg((t_1 = s_1) \wedge \ldots \wedge (t_n = s_n))}$$

$$\mathbf{sym} \quad \frac{(t = s)}{(s = t)} \qquad \mathbf{clash} \quad \frac{\neg(t = t)}{\times}$$

En donde $P$ es cualquier símbolo de predicado (incluido el símbolo "$=$") y $f$ es cualquier símbolo de función. Decidir mediante árboles si el conjunto

$$\big\{(\forall x)(g(x) = h(x)), (\forall x)(h(g(x)) = x), b = c, P(g(g(a)), b), \neg P(a, c))\big\}$$

es insatisfacible (en donde $a, b$ y $c$ son constantes).

**Ejercicio 3.** (**25 p**) Se dice que una relación binaria es un *orden* si es irreflexiva, antisimétrica (si $a$ está relacionado con $b$, entonces $b$ no está relacionado con $a$) y transitiva. Además, se dice que un orden $<$ está *bien fundado* si no existen infinitos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tales que $\ldots < a_3 < a_2 < a_1$. Por ejemplo, la relación "es-menor-que" de los números naturales es un orden bien fundado.

a. (**5 p**) Mostrar que dado un lenguaje con igualdad y un símbolo de predicado binario $R$, la proposición "$R$ es una relación de orden" es expresable en primer orden.

b. (**20 p**) Mostrar que, en cambio, no es expresable en primer orden la proposición "$R$ es un orden bien fundado".

**Ejercicio 4.** (**30 p**) Sea un lenguaje de primer orden con dos símbolos de predicado binarios $P$ y $T$. Sea la clase de modelos $\mathscr{C} = \{\mathcal{M} \mid P_{\mathcal{M}}$ y $T_{\mathcal{M}}$ son relaciones binarias, y $P^+_{\mathcal{M}} = T_{\mathcal{M}}\}$, en donde $P^+_{\mathcal{M}}$ representa la clausura transitiva de $P_{\mathcal{M}}$. Considerar la axiomatización $SQ^+$, que extiende la axiomatización $SQ$ vista en clase de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rl}
\mathbf{SQ8} & (\forall x)(\forall y)\big(P(x,y) \rightarrow T(x,y)\big) \\
\mathbf{SQ9} & (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((T(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow T(x,z)\big) \\
\mathbf{SQ10} & (\forall x)(\forall y)\big((T(x,y) \wedge \neg P(x,y)) \rightarrow (\exists z)(T(x,z) \wedge P(z,y))\big)
\end{array}$$

Sabiendo que $SQ$ es correcta y completa con respecto a la clase de todos los modelos:

a. (**10 p**) Demostrar que los axiomas $SQ8, SQ9$ y $SQ10$ son válidos en $\mathscr{C}$.

b. (**10 p**) Sea $\varphi = (\forall x)(\forall y)\big(T(x,y) \rightarrow ((\exists z)P(x,z))\big)$. Mostrar que existe un modelo $\mathcal{M}$ en donde todos los axiomas de $SQ^+$ son válidos, pero $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

c. (**10 p**) Suponiendo que $\varphi$ es válida en $\mathscr{C}$, demostrar que $SQ^+$ no es completa con respecto a $\mathscr{C}$.