Algebra Lineal

Primer recuperatorio del primer parcial - Primer Cuatrimestre 2007

Nombre y apellido	LU	Carrera	1	2	3	4	5	6

Problema 1: Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita. ¿Puede $\mathbb{V}$ tener tres subespacios propios distintos $\mathbb{W}_0$, $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ tales que $\mathbb{W}_0 \subsetneq \mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_0 + \mathbb{W}_2 = \mathbb{V}$ y $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 = \{0\}$?

Problema 2: Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ un subespacio. Probar que el conjunto

$$X = \{T \in \operatorname{End}(\mathbb{V}) \ : \ \mathbb{W} \subseteq \operatorname{Ker}(T)\}$$

es un subespacio de $\operatorname{End}(\mathbb{V})$ y calcular su dimensión en función de $\dim(\mathbb{V})$ y $\dim(\mathbb{W})$.

Problema 3: Sea $A \in K^{n\times n}$ con $n \geqslant 2$. Probar que $\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = \det(A^{n-2})A$.

Problema 4: Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz tal que $A^2 = A$. Probar que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{tr}(A)$.

Problema 5: Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita y sean $\mathbb{S}_1, \dots, \mathbb{S}_n \subseteq \mathbb{V}$ subespacios. Sean $\mathbb{T}_i = \mathbb{S}_1 + \cdots + \mathbb{S}_{i-1} + \mathbb{S}_{i+1} + \cdots + \mathbb{S}_n$ para $1 \leqslant i \leqslant n$. Probar que $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{S}_n$ si y solo si $\mathbb{V}^* = \mathbb{T}_1^0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{T}_n^0$.

Problema 6: Sean $f, g \in K[t]$. Probar que existe $p \in K[x, y]$ no nulo tal que $p(f(t), g(t)) = 0$.

$A\,\operatorname{adj}(A) = \det(A)\, I$

$f(t) = x$

$g(t) = y$

$A^2 - A = 0$