1	2	3	4	Nota
B	B	B	B	10 (diez)

APELLIDO Y NOMBRE: ZEVALLOS, DIEGO IGNACIO N° DE LIBRETA:

CARRERA: Lic. en Ciencias de la Computación

TURNO: 9 a 14hs. A-K ☐ 9 a 14hs. L-Z ☐ 14 a 16hs. ☐ 17 a 22hs. ☒

Álgebra I

Primer Cuatrimestre 2024 - Primer parcial - 17/05/2024

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{F} = \{h : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,\ldots,50\} \ / \ h \text{ es inyectiva}\}$.
Definimos en $\mathcal{F}$ la relación $\mathcal{R}$ como

$$f \, \mathcal{R} \, g \quad \text{si y sólo si} \quad \#\big(\mathrm{Im}(f) \setminus \mathrm{Im}(g)\big) = 0 \text{ o } 4.$$

a) Analizar si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

b) Sea $f \in \mathcal{F}$ definida como $f(x) = x$ para $1 \leq x \leq 4$. Calcular cuántas funciones $g \in \mathcal{F}$ satisfacen $f \, \mathcal{R} \, g$.

Ejercicio 2. Probar que

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-1} = 2^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 3. Calcular, para cada $n \in \mathbb{N}$, el resto de dividir por 18 a

$$7 \cdot 35^n + 73^{3021} + \sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot k!$$

Ejercicio 4. Caracterizar, para **cada** $a \in \mathbb{Z}$, el valor de $(a^3 + 31 : a^2 - a + 1)$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.

Justifique todas sus respuestas.

ZEVALLOS, DIEGO IGNACIO

① $\mathcal{F} = \{h : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,\dots,50\} : h \text{ es iny}\}$. $\mathcal{R}$ rel en $\mathcal{F}$ t.q

$$f \mathcal{R} g \iff \#(Im(f) - Im(g)) = 0 \text{ o } 4$$

Ⓐ Analizar si $\mathcal{R}$ es Ⓡ, Ⓣ, Ⓢ, Ⓐⓢ.

REFLEXIVIDAD q.v.q $\forall f \in \mathcal{F},\ f\mathcal{R}f$ ✓. Sea $f \in \mathcal{F}$.

$\#(Im(f) - Im(f)) = \#\emptyset = 0 \underset{def}{\iff} f\mathcal{R}f$, ~~$\forall f \in \mathcal{F}$~~.

$\boxed{\therefore \mathcal{R} \text{ es Reflexiva}}$ ✓

SIMETRÍA q.v.q $\forall f,g \in \mathcal{F},\ f\mathcal{R}g \Rightarrow g\mathcal{R}f$.

no! Es más fuerte: $Im(f) \cap Im(g) = \emptyset$

~~Ⓢ~~ es simétrica, Pues si $f,g \in \mathcal{F}$:

$f\mathcal{R}g \iff \#(Im(f) - Im(g)) = 0$ o 4. Esto indica que o $Im(f) = Im(g)$ o $Im(g) \notin Im(f)$

Pues si f,g son inyectivas, $\#Im(g) = 4$ y $\#Im(f) = 4$ ✓. Por lo tanto:

→ si $\#(Im(f) - Im(g)) = 0$, $Im(f) = Im(g)$, Pues $Im(f) \cap (Im(g))^c = \emptyset \Rightarrow \#(Im(g) - Im(f)) = \emptyset$ $\iff g\mathcal{R}f$

→ si $\#(Im(f) - Im(g)) = 4$, $\Rightarrow Im(f)$ es totalmente ~~distinta~~ disjunta a $Im(g)$, Pues no comparten ningún elemento. $\Rightarrow$ ~~$(Im(g))$~~ $\#(Im(g) - Im(f)) = 4 \iff g\mathcal{R}f$. ✓

$\boxed{\therefore \mathcal{R} \text{ es simétrica}}$ ✓

Antisimetría q.v.q $\forall f,g \in \mathcal{F},\ f\mathcal{R}g \wedge g\mathcal{R}f \Rightarrow f = g$

NO es cierto, Pues por ejemplo, sean f / $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 3$ y $g(n) = Id$. ✓

$\#(Im(f) - Im(g)) = 0$, Pues $\{1,2,4,3\} - \{1,2,3,4\} = \emptyset$

y $\#(Im(g) - Im(f)) = 0$, Pues $\{1,2,3,4\} - \{1,2,4,3\} = \emptyset$

pero $f \neq g$.

$\boxed{\therefore \mathcal{R} \text{ NO es Antisimétrica}}$ ✓

TRANSITIVIDAD   q.v.q $\forall f,g,h \in \mathcal{F},\ f\mathcal{R}g \wedge g\mathcal{R}h \Rightarrow f\mathcal{R}h$.

~~No es cierto, pues sea $f(x)=Id$, $g\begin{cases} g(1)=2 \\ g(2)=3 \\ g(3)=4 \\ g(4)=1 \end{cases}$ y $h(n)=n+4$~~

~~$f\mathcal{R}g$ pues~~

$f\mathcal{R}g$, es decir, $\#(Im(f)-Im(g))=0$ ó 4.

$g\mathcal{R}h$, es decir, $\#(Im(g)-Im(h))=0$ ó 4.

q.v. si $f\mathcal{R}h$, ~~hay~~ es decir $\#(Im(f)-Im(h))=0$ ó 4.

- Si: $\#(Im(f)-Im(g))=0$ y $\#(Im(g)-Im(h))=4 \Rightarrow Im(f)=Im(g)$, pero $Im(g)$ no tiene nada en común con $Im(h)$, por lo tanto, $Im(f)$ tampoco, de esta manera,

$$\#(Im(f)-Im(h))=4 \Leftrightarrow f\mathcal{R}h.$$

- Si: $\#(Im(f)-Im(g))=4$ y $\#(Im(g)-Im(h))=0$, entonces $Im(f)$ no tiene ningún elemento de g y $Im(g)=Im(h)$, pues tiene todos sus elementos en común. Entonces, f y g no tienen nada en común, es decir

$$\#(Im(f)-Im(h))=\#(Im(f))=4 \Leftrightarrow f\mathcal{R}h$$

- Si $\#(Im(f)-Im(g))=0$ y $\#(Im(g)-Im(h))=0$, entonces $Im(f)=Im(g)$ y $Im(g)=Im(h)$

$\Rightarrow$ Por transit. de la igualdad $Im(f)=Im(h)$, dicho de otra manera, $Im f - Im h=\emptyset$ y $\#\emptyset=0 \Leftrightarrow f\mathcal{R}h$

¡No es transitiva!

- Si: $\#(Im(f)-Im(g))=4$ y $\#$

CONTRAEJEMPLO

- Sea $f=\begin{cases} f(1)=1 \\ f(2)=7 \\ f(3)=6 \\ f(4)=2 \end{cases}$, $g=\begin{cases} g(1)=50 \\ g(2)=30 \\ g(3)=49 \\ g(4)=12 \end{cases}$ $h=\begin{cases} h(1)=2 \\ h(2)=5 \\ h(3)=7 \\ h(4)=10 \end{cases}$

$f\mathcal{R}g$, pues $\#(Im(f)-Im(g))=4$
$g\mathcal{R}h$, pues $\#(Im(g)-Im(h))=4$ → exhibir cuenta.

pero $\#(Im(f)-Im(h))=2 \neq 0 \neq 4$, entonces $f \not\mathcal{R} h$

$\boxed{\therefore\ \mathcal{R} \text{ No es transitiva}}$

b) $f \in \mathcal{F}$ $f(x) = x$, $1 \leq x \leq 4$. $\#\{g \in \mathcal{F} : f \mathcal{R} g\} = ?$ DIEGO ZEVALLOS HOJA 3

$$f(x) = x, \forall x \in \{1,2,3,4\} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 2 \\ f(3) = 3 \\ f(4) = 4. \end{cases}$$

• $f \mathcal{R} g \Leftrightarrow \#(\mathrm{Im}(f) - \mathrm{Im}(g)) = 0$ o 4. y g es iny.

Si $f \mathcal{R} g$, con $\#(\mathrm{Im}(f) - \mathrm{Im}(g)) = 0$, $\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$ en cuanto a elementos ~~, es decir, que hay $\binom{4}{4}$ formas de formar $\mathrm{Im}(g)$~~ Pero como g es una función iny, la imagen puede ser permutada; luego, hay

$$\underset{f(1)}{\underline{4}} \times \underset{f(2)}{\underline{3}} \times \underset{f(3)}{\underline{2}} \times \underset{f(4)}{\underline{1}} = 4!$$ $\Rightarrow$ Para este caso, hay ~~$\binom{4}{4}$~~ $4!$, o sea, $\boxed{4! \text{ funciones } g}$

$f(1) \in \{1,2,3,4\}$

$f(1) \in \{1,2,3,4\}$ Pero sin repetir $f(1)$

idem

agrego $f(3)$ pero con $f(1)$ y $f(2)$

• Si $f \mathcal{R} g$, con $\#(\mathrm{Im}(f) - \mathrm{Im}(g)) = 4$, $\Rightarrow \mathrm{Im}(f)$ e $\mathrm{Im}(g)$ no tienen eltos en común. Es decir, que ni 1, ni 2, ni 3, ni 4 pertenecen a $\mathrm{Im}(g)$. Pero de los elementos restantes, tienen que estar 4 de ellos, es decir:

$(50-4) = 46$

$$\underset{f(1)}{\underline{46}} \quad \underset{f(2)}{\underline{45}} \quad \underset{f(3)}{\underline{44}} \quad \underset{F(4)}{\underline{43}}$$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{hay } \frac{46!}{42!} \text{ funciones } g \text{ que cumplen esto.}}$

$f(1) \in \{5, \ldots, 50\}$

sin $f(1)$

sin $f(1)$ $f(2)$

sin $f(1)$ $f(2)$ $f(3)$

∴ Al ser estos dos casos disjuntos, sumo. Entonces hay,

$$\boxed{4! + \frac{46!}{42!} \text{ funciones } g \text{ t.q. } f \mathcal{R} g}$$

② $P(n)$: " $\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-1} = 2^n$ ", $n \in \mathbb{N}$.

q.p.q $P(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$. Uso inducción.

① CASO BASE: ¿ $P(1)$ V?

$$P(1)\ V \iff \prod_{i=1}^{1} \frac{1+i}{2i-1} = 2^1$$

$$\iff \frac{2}{2-1} = 2$$

$$\iff \underbrace{2 = 2}$$

② PASO INDUCTIVO. Sea $h \in \mathbb{N}$. Supongo $P(h)$ V, es decir, (HI) $\underbrace{\text{vale que } \prod_{i=1}^{h} \frac{h+i}{2i-1} = 2^h}$

q.v. si $\prod_{i=1}^{h+1} \frac{h+1+i}{2i-1} \overset{?}{=} 2^{h+1}$

$$\prod_{i=1}^{h+1} \frac{h+1+i}{2i-1} = \prod_{i=1}^{h} \left(\frac{h+1+i}{2i-1} \cdot \frac{h+i}{h+i} \right) \cdot \frac{2h+2}{2h+1} = \prod_{i=1}^{h} \frac{h+i}{2i-1} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{h} \frac{h+1+i}{h+i}}_{(*)} \cdot \frac{2h+2}{2h+1} =$$

$$= \prod_{i=1}^{h} \frac{h+i}{2i-1} \cdot \frac{\cancel{2h+1}}{h+1} \cdot \frac{2h+2}{\cancel{2h+1}} = \prod_{i=1}^{h} \frac{h+i}{2i-1} \cdot \frac{2\cancel{(h+1)}}{\cancel{h+1}} = 2 \cdot \prod_{i=1}^{h} \frac{h+i}{2i-1} \underset{HI}{=} 2 \cdot 2^h = \underbrace{2^{h+1}}$$

¡lo que quería probar! !!

$$(*) \prod_{i=1}^{h} \frac{h+1+i}{h+i} = \frac{\cancel{h+2}}{h+1} \cdot \frac{\cancel{h+3}}{\cancel{h+2}} \cdot \frac{\cancel{h+4}}{\cancel{h+3}} \cdots \frac{2h+1}{\cancel{2h}} = \boxed{\frac{2h+1}{h+1}}$$

("telescópico")

$P(h)$ V $\Rightarrow P(h+1)$ es V

∴ Mediante inducción, probé que $P(n)$ es V, $\forall n \in \mathbb{N}$. Es decir,

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-1} = 2^n \quad , \forall n \in \mathbb{N}.$$

③ Calcular, para cada $n \in \mathbb{N}$, el resto de dividir por 18 a: • ZEVALLOS DIEGO HOJA ④

$$7 \cdot 35^n + 73^{3021} + \sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot k!$$

$$r_{18}\left(7 \cdot 35^n + 73^{3021} + \sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot k!\right) = r_{18}\Big(\underbrace{r_{18}(7 \cdot 35^n)}_{A} + \underbrace{r_{18}(73^{3021})}_{B} + \underbrace{r_{18}\Big(\sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot k!\Big)}_{C}\Big)$$

Ⓐ $r_{18}(7 \cdot 35^n)$ (*) equivale a ver el menor número natural o cero al que la expresión es congruente (mod 18).

$$7 \cdot \underbrace{35^n}_{\equiv 17^n (18) \equiv (-1)^n (18)} = 7 (-1)^n \equiv \begin{cases} 7 & \text{si } n \equiv 0(2) \\ 11 & \text{si } n \equiv 1(2) \end{cases}$$

Ⓑ $r_{18}(73^{3021})$ ~~eq a ver~~ (*)

$$\underbrace{73}^{3021} \underset{(18)}{\equiv} 1^{3021} \underset{(18)}{\equiv} \boxed{\equiv 1 \ (18)}$$

Ⓒ $r_{18}\left(\sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot k!\right)$

$\Rightarrow$ los términos de la suma dan cero mód 18 si $k \geq 6$.

$k! \equiv 0 \ (18) \ \forall, k \geq \cancel{18}$ 6, Pues todos ellos serán ~~factores~~ múltiplos de 18. $(6 \cdot 3 = 18)$

~~Analizo n~~

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
$3^k \equiv_{(18)}$	3	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	
$k! \equiv_{(18)}$	1	2	6	6	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$3^k k! \equiv_{(18)}$	3	0	0	0	0	0	0	0	0	...									

$9 \cdot 2 = 18$ $\quad 9 \cdot 2 \cdot 3$ $\quad 9 \cdot 2 \cdot 3$ $\quad 9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6$

~~$\Rightarrow r_{18}\left(\sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot k!\right) \equiv 3 + 0 + 0 +$~~

ojo!

(si vas a ~~usar~~ que vale un patrón hay que probarlo)

$$\boxed{\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot k! \equiv 3 + 0 + 0 + \dots + 0 \ (18)}$$

$$\Rightarrow r_{18}\left(\sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot k!\right) \equiv 3, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow r_{18}\left(r_{18}(7 \cdot 35^n) + r_{18}(73^{3021}) + r_{18}\Big(\sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot k!\Big)\right) = \begin{cases} r_{18}(7 + 1 + 3) & \text{si } n \equiv 0(2) \\ \boxed{11} & \text{si } n \equiv 0(2) \\ r_{18}(11 + 1 + 3) & \text{si } n \equiv 1(2) \\ \boxed{15} & \text{si } n \equiv 1(3) \end{cases}$$

④ Caracterizar, para cada $a \in \mathbb{Z}$,

llamo $d = (a^3+31 : a^2-a+1)$, como d es MCD, cumple que:

$$\begin{cases} d \mid a^3+31 \\ d \mid a^2-a+1 \cdot a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid a^3+31 \\ d \mid a^3-a^2+a \end{cases} \xRightarrow{①-②} \begin{cases} d \mid a^2-a+31 \\ d \mid a^2-a+1 \end{cases} \xRightarrow{①-②} \boxed{d \mid 30}$$

$\Rightarrow d \in Div_+(30) \Rightarrow d \in \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$.
(Pues d es MCD, $d>0$)

Caso ②

$2 \mid d \underset{MCD}{\Leftrightarrow} 2 \mid a^3+31 \wedge 2 \mid a^2-a+1$

$\Leftrightarrow a^3 + \underbrace{31}_{\equiv 1(2)} \equiv 0(2) \quad a^2 \underbrace{-a}_{\equiv 1\cdot a(2)} +1 \equiv 0(2)$

$a^3 \equiv 1(2) \quad a^2+a \equiv 1(2)$, ~~Pero~~ Hago tabla de restos (mod 2)

$a \overset{(2)}{\equiv}$	0	1
$a^2 \overset{(2)}{\equiv}$	0	1
$a^3 \overset{(2)}{\equiv}$	0	1
$a^2+a \overset{(2)}{\equiv}$	0	0

Pero $a^2+a \not\equiv 1(2)$, para ningún $a \in \mathbb{N}$.
Luego d no puede ser múltiplo de 2.

~~Como 2∤d ⇒ 2·k∤d~~ Como $2 \nmid d \Rightarrow$ ~~2·k ∤ d, luego~~ $d \in \{1,3,5,15\}$.
|2 primo|

Caso ③

$3 \mid d \underset{MCD}{\Leftrightarrow} 3 \mid a^3+31 \wedge 3 \mid a^2-a+1$

$\Leftrightarrow a^3+31 \equiv 0(3) \wedge a^2-a+1 \equiv 0(3)$

$a^3+1 \equiv 0(3) \wedge a^2+2a \equiv 2(3)$

$a^3 \equiv 2(3) \wedge a^2+2a \equiv 2(3)$ Hago tabla de restos (mod 3)

$a \overset{(3)}{\equiv}$	0	1	2
$a^3 \equiv$	0	1	2
$a^2 \equiv$	0	1	1
$2a \equiv$	0	2	1
$a^2+2a \equiv$	0	0	2

Luego, $3 \mid d \Leftrightarrow \boxed{a \equiv 2(3)}$

CASO 5

$5 \mid d \underset{MCD}{\Leftrightarrow} 5 \mid a^3+31 \wedge 5 \mid a^2-a+1$

$\Leftrightarrow a^3+\underbrace{31}_{\equiv 1(5)} \equiv 0(5) \wedge a^2-a+1 \equiv 0(5)$

$a^3 \equiv \underbrace{4(5)}_{\equiv 1(5)} \wedge a^2+4a \equiv 4(5)$

Hago tabla de restos (mod 5)

(5)				
$a \equiv 0$	1	2	3	4
$a^2 \equiv 0$	1	4	4	1
$a^3 \equiv 0$	1	3	2	4
$4a \equiv 0$	4	3	2	1
$a^2+4a \equiv 0$	0	2	1	2

Pues no hay un $a \in \mathbb{N}$ tq

$a^3 \equiv 4(5)$ y $a^2+4a \equiv 4(5)$

idem antes

$\Rightarrow 5 \nmid d$, Por lo tanto $d \neq 5$.

y porque $5 \nmid d \underset{\boxed{5 \text{ primo}}}{\Rightarrow} \cancel{k \cdot 5 \nmid d}$

$\therefore d \in \{1,3\}$

y entonces $(a^3+31 : a^2-a+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \not\equiv 2(3) \\ 3 & \text{si } a \equiv 2(3) \end{cases}$