NOMBRE Y NRO. LIBRETA:

1	2	3	4	Calif.

ÁLGEBRA LINEAL - RECUPERATORIO DEL PRIMER PARCIAL

1er cuatrimestre 2012 (25/7/2012)

1. Sea $A \in K^{5\times 5}$ tal que $\mathrm{rg}(A^2) = 2$. Probar que $\mathrm{rg}(A) \leq 3$.

2. Dados $r_1, r_2, \dots, r_n \in K$ y $P(X) = a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_0 \in K[X]$, calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^{n-2} & r_2^{n-2} & \cdots & r_n^{n-2} \\ P(r_1) & P(r_2) & \cdots & P(r_n) \end{pmatrix}.$$

3. Consideremos los funcionales $\varepsilon, \delta \in (\mathbb{R}_3[X])^*$ definidos por $\varepsilon(P) = P(0)$, $\delta(P) = P'(0)$. Sea $S \subseteq \mathbb{R}_3[X]$ el subespacio

$$S = \langle X^3 + kX + 2k, -X^3 - X + (k^2 - 2), X^3 + X + k \rangle.$$

Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $\langle \varepsilon, \delta \rangle \oplus S^\circ = (\mathbb{R}_3[X])^*$.

4. Sea $f : V \to V$ una transformación lineal, con V un K-espacio vectorial de dimensión finita. Sea $P \in K[X]$ un polinomio irreducible. Probar que son equivalentes:

   (a) P divide al polinomio minimal de f.

   (b) $P(f)$ no es un monomorfismo.

Justifique todas sus respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.