Hoja 1 | Ejercicio 1 | Nro de Orden 29 Eric Brandwein

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$: autovalores, $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$: base de autovectores de A, v_i asociado a λ_i

$$C = A - \lambda_1 \frac{v_1 v_1^t}{v_1^t v_1}$$

a) λ_i': autovalor de $C \Leftrightarrow Cx = \lambda_i' x$ para algún $x \neq 0$. $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \det(C - \lambda_i' I) = 0$

$$Cx = \left(A - \lambda_1 \frac{v_1 v_1^t}{v_1^t v_1}\right)x = Ax - \lambda_1 \frac{v_1 v_1^t}{v_1^t v_1} x = Ax - \lambda_1 \frac{v_1 v_1^t}{\|v_1\|_2^2} x = (*)$$

~~Como B es una base de autovectores de A, A tiene rango n. Además, los autovectores de A son ortogonales entre sí.~~

(1)

$$(*) = Ax - \lambda_1 \frac{v_1 v_1^t}{\|v_1\|_2^2} x = \lambda_i x - \lambda_1 \frac{v_1 v_1^t}{\|v_1\|_2^2} x = \left(\lambda_i - \lambda_1 \frac{v_1 v_1^t}{\|v_1\|_2^2}\right) x = (**)$$

Tomemos $x = v_i$

~~Cada v_i tiene un autovalor asociado de C. Como hay n autovectores distintos (por el hecho de que son una base de $\mathbb{R}^n$), entonces hay n autovalores de C contados con multiplicidad~~

$$(**) = \left(\lambda_i v_i - \lambda_1 / \|v_1\|_2^2 \; v_1 v_1^t v_i\right)$$

Los autovectores v_i forman una base de $\mathbb{R}^n$. Si tomamos $v_i' = \frac{v_i}{\|v_i\|_2}$, entonces $\|v_i'\|_2 = 1$. Ahora, tomemos en (1) a $x = v_i'$: ✓

$$A v_i' - \lambda_1 \frac{v_1 v_1^t}{\|v_1\|_2^2} v_i' = \frac{A v_i}{\|v_i\|_2} - \frac{\lambda_1}{\|v_1\|_2} \frac{v_1 v_1^t}{\|v_1\|_2} v_i' = \frac{\lambda_i v_i}{\|v_i\|_2} - \lambda_1 v_1' v_1'^t v_i'$$

¡¡Falso!! (Y eso)

Como los v_i' siguen formando una base de autovectores de A, y sus normas son = 1, forman una base ortogonal. (sigue)

Entonces, si $i \neq 1$, $v_1'^t v_i' = 0$, y si $i = 1$, $v_1'^t v_i' = \|v_1'\|_2^2 = 1$.

- Si $i=1$: $= \frac{\lambda_i v_i}{\|v_i\|_2} - \lambda_1 v_1' . 1 = (\lambda_1 - \lambda_1) v_1' = 0 \, v_1' = C v_i'$

- si $i \neq 1$ $= \lambda_i v_i' - \lambda_1 v_1' . 0 = \lambda_i v_i' = C v_i'$

Para cada autovector v_i' de A encontramos un autovalor en C. más específicamente, encontramos que los autovalores de C son los mismos que los de A, excepto por el λ_1, que es reemplazado por el 0.

b) C: diagonalizable $\Leftrightarrow$ $\exists P, D$, D: diagonal / $C = PDP^{-1}$. Si tomamos D como la diagonal con valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, 0$ en la diagonal, y $P = V'$, vemos que $C = V' D V'^{-1}$.

Como vimos antes, podemos tomar los autovectores v_i' de A que forman una base ortogonal y usarlos como autovectores de C. Por lo tanto, podemos usar $B' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$ como base de autovectores de C.

mejor explicado en próxima hoja.

~~Si tomamos D como la diagonal con valores $\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}, 0$ en la diagonal,~~

c) Como $|\lambda_2| > |\lambda_3| \Rightarrow |\lambda_2| > 0 \Rightarrow \lambda_2 \neq 0$. Además, λ_2 es el autovalor de mayor módulo de C, porque C tiene todos los autovalores de A excepto el λ_1, que es cambiado por 0.

Por lo tanto, podemos usar el método de la potencia con C para aproximar el valor de λ_2.

En cada iteración del método, comenzando con un $x^{(0)}$ cualquiera tal que $x^{(0)} = \alpha_2 v_2' + \alpha_3 v_3' + \alpha_4 v_4' + \ldots + \alpha_n v_n' + \alpha_1 v_1'$ con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ y $\alpha_2 \neq 0$, haremos

$$\lambda_{k+1} = \frac{\|x^{(k+1)}\|_1}{\|x^{(k)}\|_1}, \text{ con } x^{(k+1)} = C x^{(k)},$$

$k \in [0, \infty)$ número de iteración.

Cuando k tiende a infinito, el valor de λ_{k+1} convergerá al valor de λ_2, siempre que se cumple que $\alpha_2 \neq 0$.

Hoja 2

Desarrollo de 1. b)

Eric Brandwein

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad V' = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v'_1 & v'_2 & \cdots & v'_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

V' ortogonal

$V'DV'^{-1}v'_i = V'DV'^t v'_i = \lambda_i v'_i$?

$V'De_i = V'\lambda_i e_i = \lambda_i v'_i$ ✓

ojo con el orden de los vectores

Como podemos ver, tomando la D y V' como se muestra, $V'DV'^{-1}$ tiene los mismos autovalores y autovectores que C, y por lo tanto son la misma matriz.

Hoja 3 Ejercicio 2.

Eric Brandwein

~~[illegible] que se cumple que $d_2 \neq \emptyset$.~~

$A = A^t$, A: s.d.p. $\Rightarrow A = LL^t$: factorización de Cholesky.

$v \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, $\|(A - \mu I)v\|_2 \leq \varepsilon \|v\|_2$.

~~A tiene valor~~ $\exists\, \sigma \in [\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon]$: valor singular de $A \Leftrightarrow$

σ^2 es autovalor de $A^t A \Leftrightarrow \sigma^2$ es autovalor de A^2.

Tomemos B una base ortogonal de autovectores de A, y representemos a v como combinación lineal de esa base.

Sean λ_i autovalores asociados a b_i tal que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$

$v = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \ldots + c_n b_n$

$(A - \mu I) v = Av - \mu v = Ac_1 b_1 + Ac_2 b_2 + \ldots + Ac_n b_n - \mu v =$

$= c_1 \lambda_1 b_1 + c_2 \lambda_2 b_2 + \ldots + c_n \lambda_n b_n - \mu v = (c_1 \lambda_1 - \mu) b_1 + (c_2 \lambda_2 - \mu) b_2 + \ldots$

$+ (c_n \lambda_n - \mu) b_n = \sum_{i=1}^n (c_i \lambda_i - \mu) b_i = \left(\sum_{i=1}^n c_i \lambda_i b_i\right) - \mu \sum_{i=1}^n b_i$

$$\left\|\left(\sum_{i=1}^n c_i \lambda_i b_i\right) - \mu \sum_{i=1}^n b_i\right\|_2 \leq \varepsilon \left\|\sum_{i=1}^n c_i b_i\right\|_2$$

~~$A^2 x_1 = \sigma^2 x_1 \Leftrightarrow A x_1 = \sigma^2 A^{-1} x_1$ $A\sigma x_2 = \sigma^2 x_1 \Leftrightarrow Ax_2 = \sigma x_1$~~

$A^2 b_i = A \lambda_i b_i = \lambda_i^2 b_i \Rightarrow A^2$ tiene los mismos autovectores que A, y sus autovalores son los de A al cuadrado. Como son n, son todos. $\Rightarrow \sigma^2$: autovalor de $A^2 \Leftrightarrow \sigma$: autovalor de A.

¿B, base o matriz?

?

Sea $A = U \Sigma B^t$ la SVD de A. $\Rightarrow (A - \mu I) v = U \Sigma B^t v - \mu v =$

$= U \Sigma B^t \left(\sum_{i=1}^n c_i b_i\right) - \mu v = U \Sigma \left(\sum_{i=1}^n c_i e_i\right) - \mu v = U \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i c_i e_i\right) - \mu v$

B base ortonormal

$$= \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i c_i u_i\right) - \mu v = \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i c_i u_i\right) - \mu \left(\sum_{i=1}^n c_i b_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i (\sigma_i u_i - \mu b_i)$$

$=$

Sigue

$= \sum_{i=1}^{n} c_i (\sigma_i b_i - \mu b_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i (\sigma_i - \mu) b_i$

$A^2 = A^t A = A A^t \Rightarrow U = B$ ✓

$\| \sum_{i=1}^{n} c_i (\sigma_i - \mu) b_i \|_2 \leq \varepsilon \| \sum_{i=1}^{n} c_i b_i \|_2$

Por b_i ser ortogonales entre sí, $\|b_i + b_j\|_2^2 = \|b_i\|_2^2 + \|b_j\|_2^2$ $i \neq j$ ✓ la suma de los cuadrados de los catetos = igual al cuadrado de la hipotenusa.

$\Downarrow$

$\| \sum_{i=1}^{n} c_i (\sigma_i - \mu) b_i \|_2 = \sum_{i=1}^{n} \| c_i (\sigma_i - \mu) b_i \|_2 \leq \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} \| c_i b_i \|_2 \right)$.

$\sum_{i=1}^{n} | c_i (\sigma_i - \mu) | \overset{1}{\| b_i \|_2} \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |c_i| \overset{1}{\| b_i \|_2}$ ✓

$\sum_{i=1}^{n} | c_i (\sigma_i - \mu) | \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |c_i| \Leftrightarrow$ ~~$\sum_{i=1}^{n} c_i \sigma_i - \mu \sum_{i=1}^{n} c_i \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} c_i \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i \sigma_i - (\mu + \varepsilon) \sum_{i=1}^{n} c_i \leq 0$~~ $\sum_{i=1}^{n} | c_i (\sigma_i - \mu) | - \varepsilon |c_i| \leq 0 \Leftrightarrow$

~~$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} | c_i \sigma_i - c_i \mu | - \varepsilon |c_i| \leq 0$~~ $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |c_i| |\sigma_i - \mu| - \varepsilon |c_i| \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (|\sigma_i - \mu| - \varepsilon) |c_i| \leq 0$ (1)

VALÍA CON LOS CUADRADOS!

Supongamos que $\sigma_i \notin [\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon]$ $\forall i \in [1, n]$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $\sigma_i - \mu \notin [-\varepsilon, \varepsilon] \Leftrightarrow |\sigma_i - \mu| > \varepsilon$ $\forall i \in [1, n]$.
Como $v \neq 0$, algún $c_i \neq 0$, ya que son los coeficientes de la representación en vectores de B de v.
$(|\sigma_i - \mu| - \varepsilon) > 0 \Rightarrow (|\sigma_i - \mu| - \varepsilon) |c_i| > 0$ para algún $i \Rightarrow$
$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (|\sigma_i - \mu| - \varepsilon) |c_i| > 0$, ya que cada uno de los sumandos es ≥ 0 y hay por lo menos uno > 0. Pero esto contradice lo que vimos antes (1), y entonces $\exists \sigma_i \in [\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon]$. ∎

B⁻

Hoja 4 | Ejercicio 3 | Eric Brandwein

$A = U \Sigma V^t$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x_i^{(k+1)} = \sigma_i v_i^t x^{(k)} + b_i$

a) Si converge, entonces $x_i = \sigma_i v_i^t x + b_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} \sigma_1 v_1^t x + b_1 \\ \sigma_2 v_2^t x + b_2 \\ \vdots \\ \sigma_n v_n^t x + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 v_1^t x \\ \vdots \\ \sigma_n v_n^t x \end{pmatrix} + b = \Sigma V^t x + b =$$

$$= U^{-1} A x + b \Leftrightarrow x - b = U^{-1} A x \Leftrightarrow Ux - Ub = Ax \Leftrightarrow Ux - Ax = Ub$$

$\Leftrightarrow (U - A)\, x = Ub$

b) $\sigma_1 < 1 \overset{?}{\Rightarrow}$ converge

El sistema converge $\Leftrightarrow$ la matriz que domina la iteración tiene radio espectral $<1 \Leftrightarrow$ el autovalor de mayor módulo es <1. ✓

La matriz que domina la iteración es ΣV^t. Busquemos sus autovalores.

$$\Sigma V^t x = \lambda x \Leftrightarrow \Sigma \begin{pmatrix} v_1^t x \\ v_2^t x \\ \vdots \\ v_n^t x \end{pmatrix} = \lambda x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 v_1^t x \\ \sigma_2 v_2^t x \\ \vdots \\ \sigma_n v_n^t x \end{pmatrix} = \lambda x$$

σ_1 es el ~~mas valor~~ mayor valor singular, por ser el primer coeficiente de Σ en una SVD.

$$\|\Sigma V^t x\|_2 = \|\lambda x\|_2 = |\lambda| . \|x\|_2$$

$$\wedge\!\!|$$

$$\|\Sigma V^t\|_2 . \|x\|_2$$

Tomemos x tal que $\|x\|_2 \neq 0$, ya que es un autovector

$$\|\Sigma V^t\|_2 \geq |\lambda|$$

Como $\|A\|_2 =$ su mayor valor singular, y la descomposición SVD de $\Sigma V^t = I \Sigma V^t$, $\|\Sigma V^t\|_2 = \sigma_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 > \sigma_1 \geq |\lambda| \Rightarrow$ el radio espectral de ΣV^t es $<1 \Rightarrow$ el sistema converge.

Hoja 5 | Ejercicio 4

Eric Brandwein

$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $m>n$, $b\in\mathbb{R}^m$, x^* solución de cuadrados mínimos de $Ax=b \iff A^tAx^*=A^tb \iff \|Ax^*-b\|_2^2$ es mínima
$$\scriptstyle x$$

a) $r=b-Ax^*$, $\min\limits_x \{x : \|Ax-(b+\alpha r)\|\} \overset{?}{=} x^* \quad \forall \alpha\in\mathbb{R}$

$$Ax-(b+\alpha r) = Ax - b - \alpha(b - Ax^*) = \underbrace{Ax}_{\tilde{A}} + \underbrace{\alpha Ax^* - (\alpha+1)b}_{-\tilde{b}}$$

$$\min_x \|Ax + \alpha Ax^* - (\alpha+1)b\| = x^* \iff \tilde{A}^t\tilde{A}x^* = \tilde{A}^t\tilde{b} \iff$$

$$\cancel{\iff A^tAx^* = A^t(\alpha Ax^* - 3b) = A^tAx^* - 2A^tb \iff}$$
$$\cancel{2A^tb = A^tAx^* - A^tAx^* = 0, \iff b\in Nu(A^t)}$$

$$\iff A^tAx^* = A^t\left(-(\alpha Ax^* - (\alpha+1)b)\right) = A^t((\alpha+1)b - \alpha Ax^*) =$$

y si $\alpha+1=0$?

$$= A^tb(\alpha+1) - \alpha A^tAx^* \iff (\alpha+1)A^tAx^* = (\alpha+1)A^tb \iff$$

$\iff A^tAx^* = A^tb \iff x^*$ es solución de cuadrados mínimos de $Ax=b$ ■

b) $p_1=(1,0)$, $p_2=(1,1)\in\mathbb{R}^2$

i. $y=\alpha_1 x+\alpha_2$. La recta pasa por el origen $\Rightarrow \alpha_2=0$

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix} \quad \alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\0\end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Queremos encontrar α_1 tal que $\alpha=\min\limits_{\alpha}\|A\alpha - b\|_2$

$$\cancel{A^tA\alpha = A^tb \iff \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\0\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \iff}$$

$$\cancel{\min_\alpha \|A\alpha - b\|_2 = \min_\alpha \left\|\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\|_2 = \min_\alpha \left\|\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_1\end{pmatrix}\right.}$$

$$A^tA\alpha = A^tb \iff \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\0\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}2\alpha_1\\2\alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \iff \alpha_1 = \tfrac{1}{2}$$

La recta que buscamos es dada por la fórmula $y=\tfrac{1}{2}x$.

ii. Ahora nuestro x^+ será $\alpha = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$, nuestro A será $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, y nuestro b será $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Queremos encontrar

$$\min_x \|Ax - (b + r)\| = \min_x \| Ax - b - (b - A\alpha)\|$$

~~si tomamos $p'_1 = b + b - A\alpha$, resolver lo de arriba~~

Si tomamos $b' = b + b - A\alpha$, resolver lo de arriba será lo mismo que resolver $\min_x \|Ax - b'\|$, que a su vez será lo mismo que encontrar la recta que pasa por el origen más cercana a los puntos $(1, b'_1)$ y $(1, b'_2)$, si $x_2 = 0$.

$$b' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Como α también es solución de $\min_\alpha \|A\alpha - b'\|$, ~~minimiza~~ la recta $y = \alpha_1 x$ minimiza las distancias a los puntos $p'_1 = (1, -1/2)$ y $p'_2 = (1, 3/2)$.