1	2	3	4	5
B	B 3/2	B	B	B

CALIF.
A

APELLIDO Y NOMBRE: [redacted]
LIBRETA: [redacted] TURNO: [redacted] 19 a 22 TEMA 1

Algebra Lineal - Primer Cuatrimestre 2013
Segundo Parcial (10/07/2013)

1. Sean $L_1 : \lambda(0,1,1)+(1,0,-3)$ y $L_2 : \mu(0,3,3)+(-3,-6,7)$. Hallar el plano Π cuyos puntos equidistan de L_1 y L_2.

   Sug.: Primero pensarlo geométricamente y luego justificar analíticamente.

2. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso mediante demostraciones o contraejemplos según corresponda:

   a) Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversibles. Entonces $\text{adj}(AB) = \text{adj}(B)\text{adj}(A)$.

   b) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ antisimétrica. Entonces $\det(A) = 0$.

   c) Sean $A, B \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ tales que $(A)_{ij} = (B)_{ij}$ para todo $1 \le i \le 3$ y todo $1 \le j \le 2$. Entonces $\det(A+B) = 4(\det(A)+\det(B))$.

3. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 12 & -3 \\ -6 & 14 & -3 \\ -18 & 36 & -7 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 12 \\ 3 & -1 & 6 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

   Decidir si A y B son semejantes.

4. Sean V un espacio vectorial de dimensión 8 y $f : V \longrightarrow V$ una transformación lineal tal que $m_f(x) = x^7$. Si $B = \{v_1, \ldots, v_8\}$ es la base de Jordan de f, hallar la forma y una base de Jordan para f^2 y f^3.

5. Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ con A inversible. Sean $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ distintos entre si. Probar que existe $i \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $\lambda_i A + B$ es una matriz inversible.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

jercicio nº1:

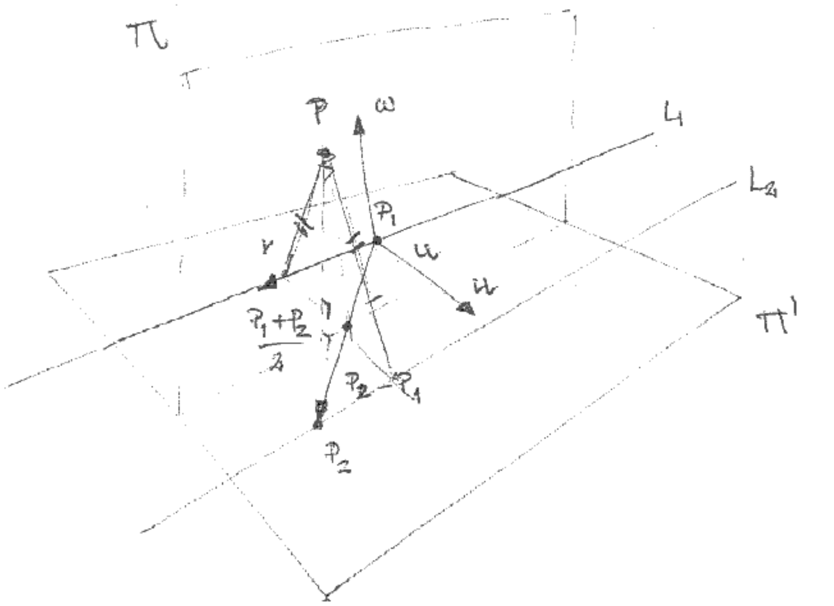
as rectas L_1 y L_2 son paralelas pues, como variedad lineal tienen el mismo ubespacio asociado, o sea:

$$L_1 = \langle (0,1,1) \rangle + (1,0,-3)$$
$$L_2 = \langle (0,3,3) \rangle + (-3,-6,7) = \langle (0,1,1) \rangle + (-3,-6,7).$$

no son la misma, pues $(-3,-6,7) \notin L_1$, pues de lo contrario existiría λ tal que:

$$\lambda (0,1,1) + (1,0,-3) = (-3,-6,7) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (1, \lambda, \lambda - 3) = (-3,-6,7)$$

o cual no es posible. Entonces $L_1 \parallel L_2$ y $L_1 \neq L_2$. Ambas rectas, al ser paralelas, están contenidas en un mismo plano. Esbozamos un gráfico aproximado de lo que queremos ver:



$v = (0,1,1)$

$P_1 \in L_1$

$P_2 \in L_2$

$L_1 \subseteq \pi'$

$L_2 \subseteq \pi'$

$\omega \perp v$ y $\omega \perp P_2 - P_1$

$u \perp v$ y $u \perp \omega$.

Afirmamos que el plano con normal u y que pasa por $\frac{P_1+P_2}{2}$ es el plano π que estamos buscando, equivalentemente:

$$\pi = \langle v, \omega \rangle + \frac{P_1 + P_2}{2}.$$

Hallemos ω: Tomamos $P_1 = (1,0,-3)$ y $P_2 = (-3,-6,7)$, luego:

$$P_2 - P_1 = (-4,-6,10)$$

luego, tomamos $\omega = (x,y,z)$, y con el producto interno canónico buscamos quien es:

$= \langle v, \omega \rangle = \langle (0,1,1), (x,y,z) \rangle = y + z$

$= \langle P_2 - P_1, \omega \rangle = \langle (-4,-6,10), (x,y,z) \rangle = -4x - 6y + 10z$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x - 6y + 10z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} -4x + 16z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 4z \\ y = -z \end{cases}$$

Entonces basta tomar $w = (4,-1,1)$.

$$\frac{P_1+P_2}{2} = \frac{(1,0,-3)+(-3,-6,7)}{2} = (-1,-3,+2)$$

Luego

$$\tilde{\Pi} = \langle (0,1,1),(4,-1,1)\rangle + (-1,-3,+2), \quad S = \langle (0,1,1),(4,-1,1)\rangle$$

Veamos que $\tilde{\Pi}$ equidista de L_1 y L_2. Tomamos $P_1 \in L_1$, $P_2 \in L_2$ y $\frac{P_1+P_2}{2} \in \tilde{\Pi}$ como antes:

$$d(L_1,\tilde{\Pi}) = \| p_{\underbrace{(S+S_{L_1})}_{\substack{L_1 \subseteq \tilde{\Pi} \Rightarrow \\ \Rightarrow S_{L_1} \subseteq S}}^\perp}\left(P_1 - \frac{P_1+P_2}{2}\right)\| = \| p_{S^\perp}\left(\frac{P_1-P_2}{2}\right)\|$$

$$d(L_2,\tilde{\Pi}) = \| p_{\underbrace{(S+S_{L_2})}_{\substack{L_2 \subseteq \tilde{\Pi} \\ S_{L_2} \subseteq S}}^\perp}\left(P_2 - \frac{P_1+P_2}{2}\right)\| = \| p_{S^\perp}\left(-\frac{P_1-P_2}{2}\right)\| =$$

$$= \| - p_{S^\perp}\left(\frac{P_1-P_2}{2}\right)\| = \| p_{S^\perp}\left(\frac{P_1-P_2}{2}\right)\| = d(L_1,\tilde{\Pi})$$

El plano equidista de las rectas, lo cual era una condición necesaria para que los puntos de $\tilde{\Pi}$ equidisten de L_1 y L_2. Veamos efectivamente que los puntos de $\tilde{\Pi}$ equidistan de L_1 y L_2:

Sea $P \in \tilde{\Pi}$, entonces existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$P = \alpha_1(0,1,1) + \alpha_2(4,-1,1) + (-1,-3,+5).$$

$$d(P,L_1) = \| p_{S_1^\perp}(P-P_1)\| = \| p_{S_1^\perp}(\alpha_1(0,1,1)+\alpha_2(4,-1,1)+(-2,-3,5))\| =$$

$$= \|\underbrace{\alpha_1 p_{S_1^\perp}(0,1,1)}_{=0} + \alpha_2 p_{S_1^\perp}\underbrace{(4,-1,1)}_{(4,-1,1)\perp(0,1,1) \Rightarrow (4,-1,1)\in S_1^\perp \Rightarrow p_{S_1^\perp}(4,-1,1)=(4,-1,1)} + p_{S_1^\perp}(-2,-3,5)\| =$$

$$= \| \alpha_2(4,-1,1) + p_{S_1^\perp}(-2,-3,5)\|$$

$$d(P,L_2) = \| p_{S_1^\perp}(P-P_2)\| = \| p_{S_1^\perp}(\alpha_1(0,1,1)+\alpha_2(4,-1,1)+(2,3,-5))\| =$$

$$= \|\alpha_1 p_{S_1^\perp}(0,1,1) + \alpha_2 p_{S_2^\perp}(4,-1,1) + p_{S_2^\perp}(2,3,-5)\| \overset{\text{como antes}}{=}$$

$$= \| \alpha_2(4,-1,1) + p_{S_1^\perp}(+2,+3,-5)\| = \| \cancel{\alpha_2(4,-1,1)+(2}, 3,$$

basta ver que:

$$\|\alpha_2(4,-1,1)+p_{S_1^\perp}(-2,-3,5)\| = \|\alpha_2(4,-1,1)+p_{S_1^\perp}(2,3,-5)\|.$$

$$p_{S_1^\perp}(2,3,-5) = (2,3,-5) - p_{S_1}(2,3,-5) = (2,3,-5) - \frac{\langle (2,3,-5),(0,1,1)\rangle}{\langle (0,1,1),(0,1,1)\rangle}(0,1,1) =$$

$$= (2,3,-5) - \left(\frac{-2}{2}\right)(0,1,1) = (2,3,-5)+(0,1,1) = (2,4,-4).$$

Además:

$$p_{S_1^\perp}(-2,-3,5) = -p_{S_1^\perp}(2,3,-5) = -(2,4,-4).$$

Notemos que:

$$\langle (2,4,-4),(4,-1,1)\rangle = 0$$

Por tanto:

los vectores son ortogonales.

$$\|\alpha_2(4,-1,1)+p_{S_1^\perp}(-2,-3,5)\|^2 = \|\alpha_2(4,-1,1)+(-2,-4,4)\|^2 =$$

$$= \|\alpha_2(4,-1,1)\|^2 + \|(-2,-4,4)\|^2 =$$

$$= \|\alpha_2(4,-1,1)\|^2 + \|-(2,4,-4)\|^2 =$$

$$= \|\alpha_2(4,-1,1)\|^2 + \|(2,4,-4)\|^2 =$$

$$= \|\alpha_2(4,-1,1)+(2,4,-4)\|^2 =$$

$$= \|\alpha_2(4,-1,1)+p_{S_1^\perp}(2,3,-5)\|^2$$

las normas son no negativas

$$\Rightarrow \|\alpha_2(4,-1,1)+p_{S_1^\perp}(-2,-3,5)\|^2 = \|\alpha_2(4,-1,1)+p_{S_1^\perp}(2,3,-5)\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\alpha_2(4,-1,1)+p_{S_1^\perp}(-2,-3,5)\| = \|\alpha_2(4,-1,1)+p_{S_1^\perp}(2,3,-5)\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(P,L_1) = d(P,L_2).$$

Como $P\in\tilde{\Pi}$ era un punto arbitrario del plano, tenemos que:

$$d(P,L_1) = d(P,L_2), \quad \forall P\in\tilde{\Pi}.$$

Luego tomamos $\tilde{\Pi} = \Pi$, que era el plano que queríamos hallar.

B 13

jercicio nº2:

-) Si $A, B \in Gl_n(\mathbb{K})$, entonces $\det(A) \neq 0$ y $\det(B) \neq 0$. Además:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{\det(A)} \quad y \quad B^{-1} = \frac{Adj(B)}{\det(B)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Adj(A) = \det(A) \cdot A^{-1} \quad y \quad Adj(B) = \det(B) \cdot B^{-1}.$$

ambién, por propiedad del determinante sabemos que:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \neq 0.$$

uego $AB \in Gl_n(\mathbb{K})$ y cumple que:

$$Adj(AB) = \frac{(AB)^{-1}}{\det(AB)}.$$

Entonces:

$$Adj(AB) = \frac{(AB)^{-1}}{\det(AB)} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \frac{1}{\det(B)} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{\det(B)} \cdot B^{-1}\right)\left(\frac{1}{\det(A)} \cdot A^{-1}\right) = Adj(B) \cdot Adj(A).$$

En conclusión:

$$Adj(AB) = Adj(B) \cdot Adj(A).$$

la afirmación es verdadera.

-) Si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ es antisimétrica, entonces $A^t = -A$. Luego, como $\det(A^t) = \det(A)$ tenemos que:

$$\det(A) = \det(A^t) = \det(-A) = (-1)^n \cdot \det(A). \Rightarrow \det(A) = (-1)^n \det(A).$$

• Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo tal que $2 = 0$ (por ejemplo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$), la afirmación es falsa, pues en ese cuerpo, todo elemento es igual a su inverso aditivo, entonces: $\det(A) = -\det(A)$.

• Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo tal que $2 \neq 0$, entonces si n es par la afirmación es ~~cierta~~ falsa, y si n es impar; es cierta, pues:

$$\det(A) = -\det(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \det(A) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$$

Luego la afirmación es falsa, pues no vale para todo $\mathbb{K}$ cuerpo, y tampoco vale $\forall n \in \mathbb{N}$. Contraejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \cancel{\det} \Rightarrow A^t = -A \quad y \quad \det(A) = 1 \neq 0.$$

$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \ldots \end{pmatrix}$

) Según la descripción del ejercicio, las matrices A y B tienen sus dos primeras filas iguales, entonces las podemos escribir del siguiente modo:

$$A^t = \left(F_1 \mid F_2 \mid F_3 \right) \quad y \quad B^t = \left(F_1, F_2, F_3' \right).$$

(Trasponemos las matrices para trabajar por columnas y así operar con mayor facilidad). Luego:

$$(A+B)^t = A^t + B^t = \left(2F_1 \mid 2F_2 \mid F_3 + F_3' \right)$$

Entonces:

lineal en la 1ra columna

lineal en la 2da columna

$$\det(A+B) = \det\left((A+B)^t\right) = \det\left(2F_1 \mid 2F_2 \mid F_3+F_3'\right) = 2\det\left(F_1 \mid 2F_2 \mid F_3+F_3'\right) =$$

$$= 4 \cdot \det\left(F_1 / F_2 / F_3+F_3'\right) = 4 \cdot \left(\det(F_1/F_2/F_3) + \det(F_1/F_2/F_3')\right) =$$

lineal en la 3ra columna

$$= 4\left(\det(A^t) + \det(B^t)\right) = 4\left(\det(A) + \det(B)\right).$$

$$\Longrightarrow \quad \det(A+B) = 4(\det(A) + \det(B))$$

a afirmación es verdadera.

jercicio nº3

alculemos el polinomio característico de ambas matrices:

$$\chi_A(t) = \det(tI_3 - A) = \det\begin{pmatrix} t+4 & -12 & 3\\ 6 & t-14 & 3 \\ 18 & -36 & t+7\end{pmatrix} \underset{F_1-F_2\to F_1}{=} \det\begin{pmatrix} t-2 & -t+2 & 0\\ 6 & t-14 & 3\\ 18 & -36 & t+7\end{pmatrix} =$$

$$(t-2)\det\begin{pmatrix}1&-1&0\\6&t-14&3\\18&-36&t+7\end{pmatrix} \underset{C_2+C_1\to C_2}{=} (t-2)\cdot\det\begin{pmatrix}1&0&0\\6&t-8&3\\18&-18&t+7\end{pmatrix} \overset{\text{desarrollando por la 1ra fila}}{=}$$

$$= (t-2)\det\begin{pmatrix}t-8&3\\-18&t+7\end{pmatrix} = (t-2)\cdot((t-8)(t+7)+54) = (t-2)\cdot(t^2-t-56+54) =$$

$$= (t-2)(t^2-t-2) = (t-2)^2(t+1)$$

$$\Rightarrow \chi_A(t) = (t-2)^2(t+1).$$

$$\chi_B(t) = \det(tI_3 - B) = \det\begin{pmatrix}t-8&6&-12\\-3&t+1&-6\\3&-3&t+4\end{pmatrix} \overset{F_2+F_3\to F_2}{=} \det\begin{pmatrix}t-8&6&-12\\0&t-2&t-2\\3&-3&t+4\end{pmatrix}=$$

$$=(t-2)\cdot\det\begin{pmatrix}t-8&6&-12\\0&1&1\\3&-3&t+4\end{pmatrix} \underset{C_3-C_2\to C_3}{=} (t-2)\cdot\det\begin{pmatrix}t-8&6&-18\\0&1&0\\3&-3&t+7\end{pmatrix} \overset{\text{desarrollando p/ la segunda fila}}{=}$$

$$=(t-2)\cdot\det\begin{pmatrix}t-8&-18\\3&t+7\end{pmatrix} = (t-2)\cdot\cancel{\det}((t-8)(t+7)+54) = (t-2)^2(t+1)$$

$$\Rightarrow \chi_B(t) = (t-2)^2(t+1)$$

Como ambas tienen el mismo autovalor doble, para ver si son semejantes basta ver si son diagonalizables o no, pues si una es diagonalizable su minimal tendría raíces simples y si la otra no, su minimal tendría una raíz doble (y como para que ambas matrices sean semejantes es condición necesaria que tengan el mismo minimal) entonces no serían semejantes.

Busquemos el autoespacio de A asociado al autovalor 2:

$$Nu(A-2I_3) = \ldots = Nu\begin{pmatrix}-6&12&-3\\-6&12&-3\\-18&36&-9\end{pmatrix} \underset{\substack{F_2-F_1\to F_2\\ F_3-3F_1\to F_3}}{=} Nu\begin{pmatrix}-6&12&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = 2x_1 - 4x_3$$

luego $(x_1,x_2,x_3)\in Nu(A-2I_3) \iff (x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,2x_1-4x_2) = x_1(1,0,2)+x_2(0,1,-4)$

$\Rightarrow \; Nu(A-2I_3) = \langle (1,0,2),(0,1,-4) \rangle$

Busquemos el autoespacio de B asociado al autovalor 2:

$$Nu(B-2I_3) = Nu \begin{pmatrix} 6 & -6 & 12 \\ 3 & -3 & 6 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 - \frac{1}{2}F_1 \to F_2 \\ F_3 + \frac{1}{2}F_1 \to F_3}}{=} Nu \begin{pmatrix} 6 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = x_1 + 2x_3$$

Luego $(x_1,x_2,x_3) \in Nu(B-2I) \iff (x_1,x_2,x_3) = (x_1, x_1+2x_3, x_3) = x_1(1,1,0) + x_3(0,2,1)$

$\Rightarrow \; Nu(B-2I_3) = \langle (1,1,0),(0,2,1) \rangle$.

Entonces en ambas matrices, el autoespacio asociado al autovalor doble tiene dimensión 2. Entonces A y B son diagonalizables y tienen los mismos autovalores, con la misma multiplicidad, entonces son semejantes. Ya que como son diagonalizables, existe una base de autovectores B_1 de A y una base de autovectores B_2 de B donde:

$$C_{EB_1} \, A \, C_{B_1E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C_{EB_2} \, B \, C_{B_2E} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = C_{EB_2}^{-1} C_{EB_1} \, A \, C_{B_1E} \, C_{B_2E}^{-1} =$$

$$= \left(C_{EB_2}^{-1} C_{B_1E}^{-1}\right) A \; C_{B_1E} \, C_{EB_2} =$$

$$= \left(C_{B_1E} \, C_{EB_2}\right)^{-1} A \; C_{B_1E} \, C_{EB_2} \Rightarrow A \sim B.$$

Ejercicio nº4:

Si $m_f(t)=t^7$, entonces f es una t.l. nilpotente. Además esto nos dice que la forma de Jordan para f tiene un bloque de Jordan de 7×7. Entonces, el otro bloque debe ser de 1×1, luego:

$$[f]_B = \left(\begin{array}{c|c} J(0,7) & 0 \\ \hline 0 & J(0,1) \end{array}\right)$$ es la forma de Jordan de f.

Esto nos dice que:

$$v_{i+1} = f(v_i) = f^i(v_1), \quad 1 \le i \le 6.$$
$$f(v_7) = f(v_8) = 0.$$

Entonces:

$$B = \{ v_1, f(v_1), f^2(v_1), f^3(v_1), f^4(v_1), f^5(v_1), f^6(v_1), v_8 \}.$$

~~El minimal de f^2 ...~~

~~Calculemos m_{f^2} y m_{f^3}~~

~~$m_f(f^2) = (f^2)^7 = f^{14} = 0 \Rightarrow m_{f^2} \mid m_f \Rightarrow m_{f^2}(t) = t^k, \; k \le 7$~~

Calculemos el minimal de m_{f^2} y m_{f^3}:

$\underline{m_{f^2}}$: Sea $p(t)=t^4$, entonces:

$$p(f^2) = (f^2)^4 = f^8 = 0 \Rightarrow m_{f^2} \mid p \Rightarrow m_{f^2}(t) = t^k, \; k \le 4. \; (1)$$

Sea v_1 (el primer elemento de la base de Jordan para f), luego, sea $q(t)=t^3$:

$$f^8(v_1) = 0 \text{ y } f^6(v_1) \ne 0 \Rightarrow p(f^2)(v_1) = 0 \text{ y } q(f^2)(v_1) \ne 0$$

Entonces: $p(t) = m_{v_1,f^2}(t) = t^4$. Sabemos que $m_{v_1,f^2} \mid m_{f^2} \Rightarrow t^4 \mid t^k$

luego $k \ge 4$ y por (1) $k=4 \Rightarrow m_{f^2}(t) = t^4$.

$\underline{m_{f^3}}$: Sea $r(t) = t^3$ y $s(t) = t^2$

Luego: $r(f^3) = (f^3)^3 = f^9 = 0 \Rightarrow m_{f^3}(t) \mid r(t) \Rightarrow m_{f^3}(t) = t^k, \; k \le 3 \; (2)$

Sea v_1 como antes:

$$f^9(v_1) = 0 \text{ y } f^6(v_1) \ne 0 \Rightarrow r(f^3)(v_1) = 0 \text{ y } s(f^3)(v_1) \ne 0$$

Entonces $m_{v_1,f^3}(t) = r(t) = t^3$. Por tanto $m_{v_1,f^3} \mid m_{f^3} \Rightarrow t^3 \mid t^k \Rightarrow k \ge 3 \overset{(2)}{\Rightarrow} k=3$

$$\Rightarrow m_{f^3}(t) = t^3.$$

Además:

$Nu(f^2) = \langle f^5(v_1), f^6(v_1), v_8 \rangle = \langle v_6, v_7, v_8 \rangle \longrightarrow$ la forma de Jordan de f^2 tendrá 3 bloques

$Nu(f^3) = \langle f^4(v_1), f^5(v_1), f^6(v_1), v_8 \rangle = \langle v_5, v_6, v_7, v_8 \rangle \rightarrow$ la forma de Jordan de f^3 tendrá 4 bloques de Jordan.

...odemos armar la base de Jordan de f^2 y f^3 reordenando los elementos de la base
... Consideramos: (*)

$$\mathcal{B}_2 = \{ v_1, f^2(v_1), f^4(v_1), f^6(v_1), f(v_1), f^3(v_1), f^5(v_1), v_8 \}$$
$$= \{ v_1, v_3, v_5, v_7, v_2, v_4, v_6, v_8 \} \longrightarrow \text{base de Jordan para } f^2$$
$$\mathcal{B}_3 = \{ v_1, f^3(v_1), f^6(v_1), f(v_1), f^4(v_1), f^2(v_1), f^5(v_1), v_8 \}$$
$$= \{ v_1, v_4, v_7, v_2, v_5, v_3, v_6, v_8 \} \longrightarrow \text{base de Jordan para } f^3$$

...n estas bases:

$$[f^2]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} J(0,4) & 0 & 0 \\ 0 & J(0,3) & 0 \\ 0 & 0 & J(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$[f^3]_{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} J(0,3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J(0,2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J(0,2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

...) Justificación:

~~Nu(f^2) = < v_6, v_7, v_8 >~~

$Nu(f^2) = \langle f^5(v_1), f^6(v_1), v_8 \rangle$ $\qquad$ $\dim(Nu(f^2)) = 3$

$Nu((f^2)^2) = Nu(f^4) = \langle f^3(v_1), f^4(v_1), f^5(v_1), f^6(v_1), v_8 \rangle$ $\qquad$ $\dim(Nu((f^2)^2)) = 5$

$Nu((f^2)^3) = Nu(f^6) = Nu(f^4) \oplus \langle f(v_1), f^2(v_1) \rangle$ $\qquad$ $\dim(Nu((f^2)^3)) = 7$

$Nu((f^2)^4) = Nu(f^8) = \mathbb{V}$, $\qquad$ $\mathbb{V} = Nu((f^2)^3) \oplus \langle v_1 \rangle$

$$\{0\} \underset{\neq}{\subset} \overset{3}{Nu(f^2)} \underset{\neq}{\subset} \overset{5}{Nu((f^2)^2)} \underset{\neq}{\subset} \overset{7}{Nu((f^2)^3)} \underset{\neq}{\subset} \overset{8}{Nu((f^2)^4)} = \mathbb{V}$$

$$0 \longleftarrow f^6(v_1) \longleftarrow f^4(v_1) \longleftarrow f^2(v_1) \longleftarrow v_1$$
$$0 \longleftarrow f^5(v_1) \longleftarrow f^3(v_1) \longleftarrow f(v_1) \longrightarrow \text{completo con } f(v_1)$$
que es l.i. con $f^2(v_1)$
$$0 \longleftarrow v_8$$

$$\mathcal{B}_2 = \{ v_1, f^2(v_1), f^4(v_1), f^6(v_1), f(v_1), f^3(v_1), f^5(v_1), v_8 \}$$

análogamente para f^3:

$Nu(f^3) = \langle f^4(v_1), f^5(v_1), f^6(v_1), v_8 \rangle$ $\qquad$ $\dim(Nu(f^3)) = 4$

$Nu((f^3)^2) = Nu(f^6) = Nu(f^3) \oplus \langle f(v_1), f^2(v_1), f^3(v_1) \rangle$ $\qquad$ $\dim(Nu(f^3)^2) = 7$

$Nu((f^3)^3) = Nu(f^9) = V = Nu((f^3)^2) \oplus \langle v_1 \rangle$

luego:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & 4 & & 7 & & 8 \\
\{0\} & \subsetneq & Nu(f^3) & \subsetneq & Nu((f^3)^2) & \subsetneq & Nu((f^3)^3) = V \\
0 & \longleftarrow & f^6(v_1) & \longleftarrow & f^3(v_1) & \longleftarrow & v_1 \\
0 & \longleftarrow & f^5(v_1) & \longleftarrow & f^2(v_1) & & \\
0 & \longleftarrow & f^4(v_1) & \longleftarrow & f(v_1) & & \\
0 & \longleftarrow & v_8 & & & &
\end{array}
$$

$B_3 = \{ v_1, f^3(v_1), f^6(v_1), f(v_1), f^4(v_1), f^2(v_1), f^5(v_1), v_8 \} =$

$= \{ v_1, f^3(v_1), f^6(v_1), f(v_1), f^4(v_1), f^2(v_1), f^5(v_1), v_8 \}$

jercicio nº 5:

ra ver esto veamos que $\det(\lambda_i A + B) \neq 0$, para algún $i \in \{0, \dots, n\}$. Luego:

$$\det(\lambda_i A + B) = \det((\lambda_i I_n + BA^{-1})A) = \det(\lambda_i I_n - (-BA^{-1})) \cdot \det(A) =$$
$$= \chi_{-BA^{-1}}(\lambda_i) \cdot \det(A).$$

mo $\chi_{-BA^{-1}}(t)$ es un polinomio de grado n y $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ son $n+1$ elementos de $\mathbb{K}$, no todos pueden ser raíces de $\chi_{-BA^{-1}}(t)$ (pues un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces). Luego, sea $i_0 \in \{0, \dots, n\}$ tal que λ_{i_0} no es raíz de $\chi_{-BA^{-1}}(t)$ que sabemos que existe por el razonamiento anterior), luego: $\chi_{-BA^{-1}}(\lambda_{i_0}) \neq 0$ ya que λ_{i_0} no es raíz), ~~luego~~. Además, como A es inversible, $\det(A) \neq 0$.

Por lo tanto:

$$\det(\lambda_{i_0} A + B) = \underbrace{\chi_{-BA^{-1}}(\lambda_{i_0})}_{\neq 0} \underbrace{\det(A)}_{\neq 0} \neq 0.$$

Luego, para este i_0, $\lambda_{i_0} A + B$ es una matriz inversible.