3. LÍMITES EN VARIAS VARIABLES

Definición de límite en $\mathbb{R}$:

Sea $f : A\ abierto \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo alrededor de x_0 (no necesariamente en x_0), entonces:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ si:

Dado $\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que: $\forall\ x \in A\ vale\ 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Definición:

$A \subseteq \mathbb{R}^2$; $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es punto de acumulación de A si:

$$(B_r(x_0, y_0) - \{(x_0, y_0)\}) \cap A \neq \emptyset \ \ \forall\ r > 0$$

Definición de límite en $\mathbb{R}^2$:

$A \subseteq \mathbb{R}^2$; $f : A\ abierto \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ punto de acumulación de A. Se define:

$\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = L \in \mathbb{R}$ si:

$$\text{Dado } \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \text{ tal que: } \forall\ (x, y) \in A\ vale$$
$$0 < \|(x - x_0,\ y - y_0)\| < \delta \Longrightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

$$\text{ie, } \forall\ (x, y) \in [A \cap (B_\delta(x_0, y_0) - \{(x_0, y_0)\})]\ es\ f(x, y) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

Acotaciones útiles:

$$x^2 \leq x^2 + y^2\ ;\ y^2 \leq x^2 + y^2;\ |x| \leq \|(x, y)\|;\ |y| \leq \|(x, y)\|$$

$$\text{Si } (x, y) \neq (0, 0) : \quad \tfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1;\ \tfrac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1;\ \tfrac{|x|}{\|(x,y)\|} \leq 1;\ \tfrac{|y|}{\|(x,y)\|} \leq 1$$

Continuidad:

$f : A\ abierto \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $\vec{a} = (a_1, a_2) \in A$, f se dice continua en $\vec{a}$ si:
$\lim\limits_{(x,y) \to (a_1,a_2)} f(x, y) = f(a_1, a_2)$

Definiciones:

1. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice acotado si $\exists\ m > 0$ tal que todo elemento $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ es tal que $\|\vec{a}\| < m$, ie, $\exists\ M > 0$ tal que $A \subseteq B_M(\vec{0})$.
2. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice compacto si A es cerrado y acotado.

Proposición (criterio de compaticidad):

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto; $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces:

1. Si $f(A)$ es cerrado y $f(A)$ es acotado $\Longrightarrow f(A)$ es compacto.
2. En ese caso, $\exists\ \vec{a_1}, \vec{a_2} \in A$ tal que $f(\vec{a_1}) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{a_2})\ \forall\ x \in A$, ie, $f(A) = \{f(\vec{x}) : \vec{x} \in A\} \subseteq \mathbb{R}$ tiene máximo y mínimo.