Parcial de lógica

Lógica y computabilidad

2do Cuatrimestre de 2018

El examen es a libro abierto y se puede suponer demostrado lo dado en las clases y los ejercicios de las guías colocando referencias claras. Entregar cada ejercicio en hojas separadas. En cada hoja deben figurar nombre y apellido.

Ejercicio 1. En lógica proposicional se define al *chirimbolo* $\wp$ como el conector lógico dado por la siguiente tabla de verdad:

p_1	p_2	p_3	$\wp(p_1, p_2, p_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Decida y demuestre si el chirimbolo es adecuado para la lógica proposicional.

Ejercicio 2. Sean Γ_1 y Γ_2 dos conjuntos maximales consistentes de la lógica proposicional. Decida y demuestre si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a. Si $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$, entonces existe una variable proposicional p_i tal que o bien ocurre que $p_i \in \Gamma_1$ y $\neg p_i \in \Gamma_2$, o bien $\neg p_i \in \Gamma_1$ y $p_i \in \Gamma_2$.

b. Existe Γ_3 maximal consistente, con $\Gamma_3 \neq \Gamma_1$ y $\Gamma_3 \neq \Gamma_2$, tal que $\Gamma_3 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Ayuda: Puede dar por sabido que si Γ es maximal consistente entonces existe una *única* valuación v tal que $v \vDash \Gamma$.

Ejercicio 3. a. Sea $\mathcal{L} = \{f, =\}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de función unario. Sea $\mathcal{I}$ la $\mathcal{L}$-estructura de universo $[-1, 1]$ (el intervalo de los números reales entre -1 y 1) donde $f^{\mathcal{I}}(x) = x^2$. Demostrar que el 1 es un elemento distinguible de $\mathcal{I}$.

b. Sea $\mathcal{L} = \{s, d, =\}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, un símbolo de función unario s, y un símbolo de función binario d. Sea $\mathcal{R}$ la $\mathcal{L}$-estructura dada por $\{\mathbb{R}_{>0}, suc, div\}$, donde $suc(x) = x + 1$ y $div(x, y) = x/y$. Demostrar que todo número racional mayor que 0 es distinguible.

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{L} = \{=, f, c\}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, un símbolo de función unaria f y un símbolo de constante c. Demostrar que no es definible la clase de modelos $\mathcal{M}$ en los cuales vale que para todo x existe un n_x tal que

$$\underbrace{f_{\mathcal{M}}(f_{\mathcal{M}}(\ldots(f_{\mathcal{M}}}_{n_x \text{ veces}}(x))\ldots)) = c_{\mathcal{M}}$$

En decir, mostrar que no existe una sentencia φ del lenguaje $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi$ si y solo si $\mathcal{M}$ tiene la propiedad mencionada.