1	2	3	4
B	B	B	B

CALIF.
A

APELLIDO Y NOMBRE: MAIL:

LIBRETA: TURNO: $\boxed{14 \text{ a } 17}$ $\boxed{19 \text{ a } 22}$ **TEMA 1**

Algebra Lineal - 1er Cuatrimestre 2016

1er Parcial (14/05/2016)

---

1. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$S = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid a_{11} + ka_{12} - ka_{21} = (2k+1)a_{11} + 2ka_{12} - ka_{22} = 0\} \quad \text{y}$$

$$T = \langle \begin{pmatrix} 1 & k-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1+k-k^2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & k-2 \\ k^2-k & k \end{pmatrix} \rangle.$$

Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S = T$.

---

2. Sea $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_3[X])$ definida por $g(P) = P - P'$. Sea $E = \{1, X, X^2, X^3\}$ y B la base de $\mathbb{R}_3[X]$ tal que $C(E, B) = [g]_E$. Consideremos $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_3[X])$ la transformación lineal que satisface

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallar bases de $\mathrm{Nu}(f^2)$ e $\mathrm{Im}(f^2)$.

---

3. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ tal que $f^2 = Id$. Probar que:

   (a) $V = \mathrm{Nu}(f - Id) \oplus \mathrm{Nu}(f + Id)$ (Sug: $v = \frac{v+f(v)}{2} + \frac{v-f(v)}{2}$).

   (b) $\mathrm{Im}(f - Id) = \mathrm{Nu}(f + Id)$.

---

4. En $\mathbb{R}_2[X]$ se considera el producto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 x^2 p(x)q(x)dx$, y el subespacio

$$S = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid p''(1) = 0, p(0) = 0\}.$$

   (a) Hallar una base de $S^\perp$.

   (b) Hallar $p \in S^\perp$ que minimice el valor de $\int_0^1 x^2(3x - 2 - p(x))^2 dx$.

$\boxed{\text{JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS}}$

1. Veamos si las ecuaciones de S son l.i.

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -k & 0 \\ 2k+1 & 2k & 0 & -k \end{pmatrix} \xrightarrow[f_2 = f_2 - (2k+1) f_1]{} \begin{pmatrix} 1 & k & -k & 0 \\ 0 & -2k^2+k & 2k^2+k & -k \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ son l.i. sii $k \neq 0$ $\Rightarrow$ $\dim(S) = \begin{cases} 2 & \text{si } k \neq 0 \\ 3 & \text{si } k = 0 \end{cases}$

Analicemos T para cada caso

$\underline{k=0}$

$S = T \Rightarrow \dim(T) = 3 \Leftrightarrow$ sus 3 generadores son l.i.

$$T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \overset{N_1 - N_3}{=} \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ + son l.i.}$$

pero $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin S$ (por la primera ecuación) $\Rightarrow T \neq S$

$\underline{k \neq 0}$

$S = T \Rightarrow \dim(T) = 2$

Veamos dependencia lineal de los generadores de T en la base canónica

$$\begin{pmatrix} 1 & k-2 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1+k-k^2 & 2 \\ 1 & k-2 & k^2-k & k \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{f_3 = f_3 - f_1 \\ f_2 = f_2 \frac{1}{k},\ k \neq 0}]{} \begin{pmatrix} 1 & k-2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1+k-k^2}{k} & 2 \\ 0 & 0 & k^2-k & k-1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim(T) = 2 \Leftrightarrow k^2 - k = 0 \wedge k - 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{k = 1}$ $\Rightarrow T = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Como S y T tienen la misma dimensión, $S = T$ sii los generadores de T están en S

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in S$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S \Rightarrow T \subseteq S \Rightarrow T = S$

$\Rightarrow \underline{S = T \Leftrightarrow k \in \{1\}}$

2/4

2. Sea $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

$$[f^2]_B = [f]_B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como vemos que $[f^2]_B$ tiene 3 filas l.i., $rg([f^2]_B) = 3$

$\Rightarrow \dim(Im(f^2)) = 3$ y $\dim(Nu(f^2)) = 1$

Vemos que $[f^2]_B \cdot (0,1,-1,-1) = 0 \Rightarrow (v_2 - v_3 - v_4) \in Nu(f) \xRightarrow{\dim(Nu(f^2))=1} Nu(f^2) = \langle v_2 - v_3 - v_4 \rangle$

Como $f^2(v_3) = f^2(v_2) - f^2(v_4)$ y $\dim(Im(f^2)) = 3$,

$Im(f^2) = \langle f^2(v_1), f^2(v_2), f^2(v_4) \rangle = \langle 2v_1 - 2v_2, 2v_3, v_1 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

Buscamos ahora la base B

$C(B,E) = C(E,B)^{-1} = [g]_E^{-1}$

$$[g]_E = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 = f_3 + 3f_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2 = f_2 + 2f_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 = f_1 + f_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow C(B,E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = C(B,E) \cdot (1000) = (1000) \\ v_2 = C(B,E) \cdot (0100) = (1100) \\ v_3 = C(B,E) \cdot (0010) = (2210) \\ v_4 = C(B,E) \cdot (0001) = (6631) \end{cases}$$

Finalmente

$Nu(f^2) = \langle (1100)_E - (2210)_E - (6631)_E \rangle = \langle (-7,-7,-4,-1)_E \rangle = \langle (7,7,4,1)_E \rangle$

$Im(f^2) = \langle (1000)_E, (1100)_E, (2210)_E \rangle$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} Nu(f^2) = \langle 7 + 7x + 4x^2 + x^3 \rangle \\ Im(f^2) = \langle 1, 1+x, 2+2x+x^2 \rangle \end{array}}$$

3/4

3. (a) Veamos que $Nu(f-Id) \cap Nu(f+Id) = \{0\}$

Sea $v \in Nu(f-Id) \cap Nu(f+Id)$

$$v = \frac{v+v}{2} + \frac{f(v)-f(v)}{2} = \frac{v+f(v)}{2} - \frac{f(v)-v}{2} = \frac{(f+Id)(v)}{2} - \frac{(f-Id)(v)}{2} = 0$$

$$\Rightarrow v = 0 \Rightarrow Nu(f-Id) \cap Nu(f+Id) = \{0\}$$

Sea $v \in V$

Sean $w = v + f(v)$, $u = v - f(v)$

$$(f-Id)(w) = f(v) + f^2(v) - v - f(v) = f^2(v) - v = \cancel{v} - v = 0 \Rightarrow w \in Nu(f-Id)$$

$$(f+Id)(u) = f(v) - f^2(v) + v - \cancel{f(v)} = -f^2(v) + v = -v + v = 0 \Rightarrow u \in Nu(f+Id)$$

Como vimos antes,

$$v = \frac{v+f(v)}{2} + \frac{v-f(v)}{2} = \underbrace{\frac{w}{2}}_{\in Nu(f-Id)} + \underbrace{\frac{u}{2}}_{\in Nu(f+Id)} \Rightarrow v \in Nu(f-Id) \oplus Nu(f+Id)$$

intersección $=\{0\}$

$$\Rightarrow V \subseteq Nu(f-Id) \oplus Nu(f+Id)$$

Y como la otra contención es trivial,

$$\underline{V = Nu(f-Id) \oplus Nu(f+Id)}$$

(b) Sea $\dim(V) = n$

Por teo de la dimensión, $\dim(Im(f-Id)) + \dim(Nu(f-Id)) = \dim(V)$

$$\Rightarrow \dim(Nu(f-Id)) = n - \dim(Im(f-Id))$$

Y por la suma directa probada anteriormente,

$$\dim(Nu(f-Id)) + \dim(Nu(f+Id)) = \dim(V) = n$$

$$\Rightarrow (n - \dim(Im(f-Id))) + \dim(Nu(f+Id)) = n$$

$$\Rightarrow \dim(Im(f-Id)) = \dim(Nu(f+Id))$$

Como tienen la misma dimensión basta con probar una contención para probar la igualdad.

$\subseteq$ Sea $v \in V$

Sea $u = (f - Id)(v) = f(v) - v$, $u \in Im(f - Id)$

Y por lo visto en el punto anterior, $(-u) \in Nu(f + Id) \Rightarrow u \in Nu(f + Id)$

$\Rightarrow Im(f - Id) \subseteq Nu(f + Id)$

Y como tienen la misma dimensión,

$$\underline{Im(f - Id) = Nu(f + Id)} \quad \square$$

NOTA

4/4

4 (a) Observamos que S tiene dimensión 1. $\Rightarrow \dim(S^{\perp}) = 2$

Además, $X \in S \Rightarrow S = \langle X \rangle$

Sea $p(x) = aX^2 + bX + c$,

$$p \in S^{\perp} \Leftrightarrow \langle p, X \rangle = 0 \Rightarrow \int_0^1 x^2 \cdot x \cdot (aX^2 + bX + c)\, dx = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{6}aX^6 + \frac{1}{5}bX^5 + \frac{1}{4}cX^4\right)\Big|_0^1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}a + \frac{1}{5}b + \frac{1}{4}c = 0$$

$$\Rightarrow (6X^2 - 5X), (6X^2 - 4) \in S^{\perp} \text{ y son l.i.}$$

$$\Rightarrow \underline{S^{\perp} = \langle 6X^2 - 5X,\ 6X^2 - 4 \rangle}$$

(b)

Sea $q(x) = 3x - 2 - p(x)$

Queremos minimizar $\|q\|^2$

Como $S \perp S^{\perp}$,

$$q = P_S(q) + P_{S^{\perp}}(q)$$

$$\Rightarrow \|q\|^2 = \|P_S(q) + P_{S^{\perp}}(q)\|^2 \overset{\text{pitágoras}}{=} \|P_S(q)\|^2 + \|P_{S^{\perp}}(q)\|^2$$

$$= \|P_S(3x - 2 - \underset{\in S^{\perp}}{p(x)})\|^2 + \|P_{S^{\perp}}(3x - 2 - p(x))\|^2$$

$$= \|P_S(3x-2)\|^2 + \|P_{S^{\perp}}(3x - 2 - p(x))\|^2$$

$$\Rightarrow \|q\|^2 \geq \|P_S(3x-2)\|^2 \quad \forall p$$

si $p = \left(-\frac{1}{2}\right)(6X^2 - 5X) + \frac{1}{2}(6X^2 - 4) = \frac{5}{2}X - 2 \in S^{\perp}$

$$\Rightarrow q = 3x - 2 - \frac{5}{2}x + 2 = \frac{1}{2}x \in S$$

$$\Rightarrow P_{S^{\perp}}(q) = 0 \Rightarrow \|q\|^2 = \|P_S(3x-2)\|^2$$

$$\Rightarrow \underline{p = \frac{5}{2}X - 2 \text{ minimiza } \|q\|^2}$$