

Aclaración: Solo se entregaba la hoja del punto 9.

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	Calificación
10	10	10	10	10	10	10	10	20	70

NOMBRE Y APELLIDO: SEBASTIÁN IGNACIO ANDRÉS

LIBRETA: 1020/22

- Tiene cuatro horas para realizar el examen.
- En los ejercicios E_1 a E_8 , debe rodear/marcar con claridad la opción que considere correcta. Evitar redondeos en cuentas intermedias. Redondear al final y considerar 4 posiciones decimales. Estos ejercicios valen 10 puntos cada uno.
- El ejercicio E_9 debe resolverse en hoja aparte y vale 20 puntos.
- Para aprobar, se requiere un mínimo de 60 puntos.

1. Ejercicio E_1 :

Una urna contiene 5 bolas rojas, 4 azules, 10 verdes y 7 negras. Se eligen tres bolas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean del mismo color si se las selecciona con reposición?

a. 0.065

b. 0.3731

c. 0.3311

d. 0.0872

M

2. Ejercicio E_2 :

Se estima que el 15% de cierta población padece una enfermedad viral. Cierta test para detectar la enfermedad, se sabe que resulta negativo en el 20% de los casos. Sin embargo, este porcentaje cambia cuando se testea a la población de verdaderos enfermos con el virus: al 40% de la población que padece la enfermedad viral, el test para detectarla le resulta negativo. Si un paciente adulto elegido al azar recibe un test negativo para la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que realmente la padezca?

a. 0.45

b. 0.075

c. 0.1125

d. 0.3

B

3. Ejercicio E_3 :

Se tienen dos dados: uno cargado, en el que los números impares tienen probabilidad 0.25 de salir cada uno, y uno equilibrado. Se lanza una moneda normal: si sale cara, se elige el dado cargado y si sale ceca, el equilibrado. Luego, se arroja el dado 9 veces de forma independiente. Indicar el valor de la probabilidad de obtener impar en 7 lanzamientos.

a. 0.1853

b. 0.8391

c. 0.3003

d. 0.0352

B

4. Ejercicio E_4 :

En la producción de cierto tipo de zócalo, el número de defectos por metro (Y) es una variable aleatoria que puede asumirse que se distribuye como una Poisson de parámetro 10. La ganancia del fabricante (en unidades monetarias por metro de zócalo) puede suponerse dada por $X = 308 - 2Y - Y^2$. Indicar cuál de los siguientes resultados corresponde a la ganancia esperada.

a. 308

b. 268

c. 438

d. 178

B

5. Ejercicio E_5 :

Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{216k}{(x+6)^5}, \text{ para } x \geq 0.$$

Indicar el valor que corresponde a k .

W: 1028/22

Sebastián Andrés

23/05/2023

E9:

$X =$ "peso de una bolsa de cemento en kg"

$$\mu_x = 9,83 \quad \text{y} \quad \sigma_x^2 = 0,25$$

Cuántas unidades como mínimo, deberán producirse para satisfacer un pedido de al menos 3182 kg con probabilidad mayor a 0,9913?

• Sea $T = \sum_{i=1}^m X_i$, con $X_i =$ "peso de la i -ésima bolsa" ✓

• Sabemos por consigna que el peso entre bolsas es independiente. (ver VA 110). ✓

• Buscamos m tal que:

$$P(T \geq 3182) \geq 0,9913, \quad \text{estandarizamos}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^m X_i \geq 3182\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^m X_i - m\mu}{\sigma\sqrt{m}} \geq \frac{3182 - m\mu}{\sigma\sqrt{m}}\right) ✓$$

luego, sabemos que $\mu = 9,83$ y $\sigma = \sqrt{0,25} = 1/2$

$$\Rightarrow P\left(\frac{\sum_{i=1}^m X_i - 9,83m}{1/2\sqrt{m}} \geq \frac{3182 - 9,83m}{1/2\sqrt{m}}\right) \geq 0,9913 ✓$$

cumple }
 Por TCL, como $E(T) = E(\sum X_i) = \sum E(X_i) = m\mu_x$ es
 finito y $V(T) = V(\sum X_i) = \sum V(X_i) = m \cdot \sigma^2$ también,

puedo aproximar $\frac{T - m\mu}{\sigma\sqrt{m}} \sim N(0,1)$ ✓ \rightarrow

NOTA

Entonces

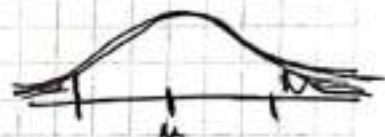
$$P\left(\frac{+ - 9,83m}{\frac{1}{2}\sqrt{m}} \geq \frac{3182 - 9,83m}{\frac{1}{2}\sqrt{m}}\right) \geq 0,9913$$

Aproximo a ↓

$$P\left(z \geq \frac{3182 - 9,83m}{\frac{1}{2}\sqrt{m}}\right) \geq 0,9913$$

$$1 - \Phi\left(\frac{3182 - 9,83m}{\frac{1}{2}\sqrt{m}}\right) \geq 0,9913$$

$$\Phi\left(\frac{3182 - 9,83m}{\frac{1}{2}\sqrt{m}}\right) \leq 0,0087$$



lo veo por simetría en la tabla.

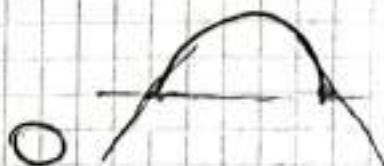
Aplico $\Phi^{-1}(\alpha)$, porque es ^{summe} creciente monótona

$$\frac{3182 - 9,83m}{\frac{1}{2}\sqrt{m}} \leq -2,38 \quad \leftarrow \text{Tabla (Por Simetría de } z \text{ en } M=0)$$

$$3182 - 9,83m \leq \frac{1}{2}\sqrt{m} \cdot (-2,38), \text{ sea } M = \sqrt{m}$$

$$-9,83M^2 + 3182 \leq -1,19M$$

$$+9,83M^2 - 1,19M - 3182$$



→ wego, de la cuadrática solo me importa la rama positiva, $17,18,05 \rightarrow N > 18,05^2$

SE DEBEN HACER M MENOS

NOTA

$$M > 325,0 \rightarrow$$

326 BALSOS

Ej. 1 (solo entrego rojo y NO)

El error está en que era con reposición!!

U = {5R, 4A, 10V, 7N} => #U = 26

se eligen 3 bolas al azar. ¿Poder ser 3 iguales?

P = P { todos son rojos } + P { todos son azules } + P { todas son verdes } + P { todos son negros }

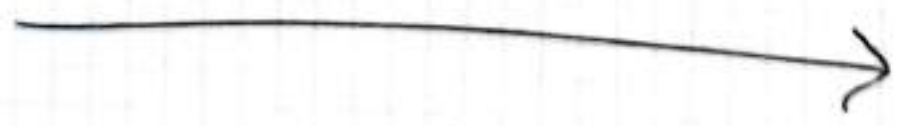
P { todos son rojos } = 5/26 * 4/25 * 3/24 = 1/260

P { todos son azules } = 4/26 * 3/25 * 2/24 = 1/650

P { todas son verdes } = 10/26 * 9/25 * 8/24 = 3/65

P { todos son negros } = 7/26 * 6/25 * 5/24 = 7/520

P = 1/260 + 1/650 + 3/65 + 7/520 = 13/200 ≈ 0,065



Ej 2:

- El 15% de cierta población padece una enf. viral.
 - $P\{\text{"el test es negativo"}\} = 0,20$
 - $P\{\text{"el test es negativo"} \mid \text{"el paciente está enfermo"}\} = 0,40$
 - $P\{\text{"el paciente está enfermo"}\} = 0,15$
- ¿ $P\{\text{"está enfermo"} \mid \text{"test da negativo"}\}$?

$$P\{\text{está enf} \mid \text{test neg}\} = \frac{P\{\text{test neg} \cap \text{enfermo}\}}{P\{\text{test neg}\}} = \frac{0,40 \cdot 0,15}{0,20}$$

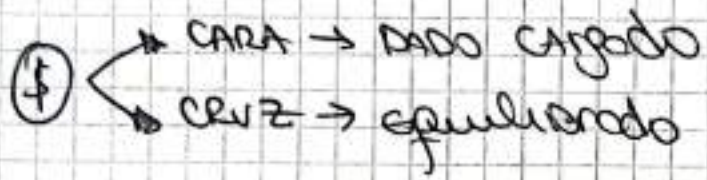
$$P\{\text{test neg} \cap \text{enfermo}\} = P\{\text{test neg} \mid \text{enf}\} P\{\text{enf}\} \\ = 0,40 \cdot 0,15$$

$$\Rightarrow P\{\text{enfermo} \mid \text{test neg}\} = \frac{0,40 \cdot 0,15}{0,20} = 0,30$$

E3 : Se tienen dos dados. \rightarrow cargado ~~no cargado~~
 \rightarrow equilibrado

- En el dado cargado, el impar tiene proba 0,25 de salir

① Se lanza una moneda:



② SE AROJA EL DADO 9 VECES INDEP

¿P {obtener impar 7 veces}?

SEA $X = \#$ impares obtenidos de 7 tiradas del dado

$X | \text{CARA} \sim \text{Bi}(n=9, p=0,25)$ || CARGADO: 3 dados de
 2 proba 0,25 \rightarrow 0,25

$X | \text{CEUZ} \sim \text{Bi}(n=9, p=\frac{1}{2})$ || EQUILIBRADO
 {1, 3, 5} tienen cada proba 1/6
 \rightarrow 3 dados de proba 1/6

$$P\{7 \text{ IMPAR}\} = P\{7 \text{ IMPAR} | \text{CARA}\} P\{\text{CARA}\} + P\{7 \text{ IMPAR} | \text{CEUZ}\} P\{\text{CEUZ}\}$$

$$= P_{X|CARA}(7) \cdot \frac{1}{2} + P_{X|CEUZ}(7) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \binom{9}{7} \cdot 0,25^7 \cdot 0,25^2 \cdot \frac{1}{2} + \binom{9}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 0,3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{10384} \cdot \frac{1}{2} = \underline{0,1853}$$

Ej) $Y =$ "número de defectos por metro"

$$Y \sim P(10)$$

$X =$ "ganancia del fabricante por metro"

$$X = 308 - 2Y - Y^2 = 308 - 2Y - Y^2$$

¿Cuál es la ganancia esperada?

$$E(X) = E(308 - 2Y - Y^2)$$

$$= E(308) - 2E(Y) - E(Y^2)$$

$$= 308 - 2E(Y) - E(Y^2) = 308 - 2 \cdot 10 - 110 = \underline{178}$$

Obs: (En $Y \sim P(\lambda)$) $\begin{cases} E(Y) = \lambda \\ V(Y) = \lambda \end{cases}$

$$E(Y) = 10$$

$$E(Y^2) = 110$$

$$V(Y) = 10 = E(Y^2) - E(Y)^2$$

$$E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2$$

$$= 10 + 10^2 = 110$$

$$E(X) =$$

$$= 308 - 2E(Y) - E(Y^2)$$

$$= 308 - 2 \cdot 10 - 110$$

$$= 178$$

ES: Sea f_x una densidad:

$$f_x(x) = \frac{216K}{(x+6)^5} \cdot \frac{I(x)}{(9+6x)} \quad \underline{\text{HALLAR } K}$$

OBS: para ser densidad, vale $\int_{\mathbb{R}} f_x(x) dx = 1$

Entonces, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{216K}{(x+6)^5} \cdot \frac{I(x)}{(9+6x)} dx = 1$

$$1 = \int_0^{+\infty} \frac{216K}{(x+6)^5} dx = 216K \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+6)^5} dx$$

Sea $u = x+6 \rightarrow du = dx$

$$1 = 216K \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^5} du = \text{~~216K \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^5} du~~}$$

↓
 $= 216K \int_6^{+\infty} u^{-5} du$

$$= 216K \left[\frac{u^{-4}}{-4} \right]_6^{+\infty} =$$

$$\frac{u^{-4}}{-4} \xrightarrow{du} u^{-5}$$

Ahora los límites
Sea $+\infty = \infty$
 $0+6 = 6$

$$1 = \frac{216K}{4} \left(\frac{1}{6^4} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{216}{4} K \cdot \frac{1}{6^4} = 1$$

$$= \frac{54K}{6^4} = 1 \rightarrow K = \frac{6^4}{54} = 24$$

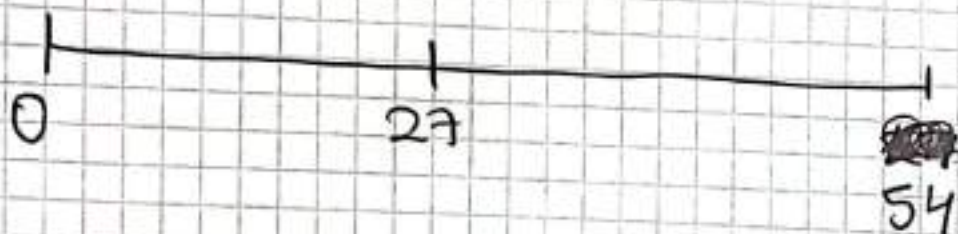
E6

- Los colectivos de la línea 125 salen en intervalos de 27 min desde las 5:00 AM.

- X = "hora de llegada a la parada de cobrecu" del pasajero (unidad las 5)

$$X \sim U(0, 54)$$

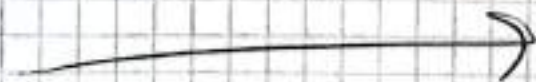
¿P {DEBE ESPERAR MENOS DE 9 min el colectivo?}



t = "tiempo de espera al colectivo"

$$t|_{x < 27} = 27 - x \quad \text{y} \quad t|_{x \in (27, 54)} = 54 - x$$

$$\text{luego } P(t < 9) = P(t < 9 | x < 27) P(x < 27) \\ + P(t < 9 | x > 27) P(x > 27)$$



$$E6) P(T < 9) = P(T < 9 | X \in [0, 27]) P(X \in [0, 27]) + P(T < 9 | X \in [27, 54]) P(X \in [27, 54])$$

veo a $P(T < 9 | X \in [0, 27])$ como $P(X \in [0, 27]) = P(X \in [27, 54]) = 1/2$

$$P(T < 9 | X \in [0, 27]) = P(27 - X < 9), \quad X \in [0, 27]$$

$X \sim U(0, 27)$

$$= P(X > 18) = 1 - F_X(18)$$

$$= 1 - \frac{18}{27} = \left(\frac{1}{3}\right) \checkmark$$

$$P(T < 9) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \leftarrow \text{ESTA}$$

$$P(T < 9 | X \in [27, 54]) = P(54 - X < 9) = P(X > 45), \quad X \sim U(27, 54)$$

$$= 1 - F_X|_{54}(45) = 1 - \frac{18}{27} = \left(\frac{1}{3}\right) \checkmark$$

$$\int y e^{-y^2/13} dy = \begin{cases} u = y^2 \\ du = 2y dy \end{cases}$$

$$\int y e^{-u/13} \frac{du}{2y}$$

$$\rightarrow dy = \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int e^{-u/13} = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-u}}{-1/13} \right] = \frac{1}{2} \left[e^{-u} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{13} e^{-u} = \frac{1}{26} e^{-y^2} = \frac{-13}{7} e^{-y^2}$$

$$(7) f_Y(y) = \frac{2}{13} y e^{-y^2/13}, \quad y \geq 0$$

Hallar $\&$ $F_X(t) = 0,59$ si $X = Y^2$.

$$F_X(t) = P(X \leq t) = P(Y^2 \leq t) = P(Y \leq \sqrt{t})$$

$y \in [0, \infty)$

o luego $F_X(t) = F_Y(\sqrt{t}) = 0,59$

$$F_Y(k) = \int_0^k \frac{2}{13} y e^{-y^2/13} dy = \frac{2}{13} \int_0^k y e^{-y^2/13} dy$$

IFP: $\begin{cases} v = y \rightarrow v = y^2/2 \\ u = e^{-y^2/13} \rightarrow du = -\frac{y}{13} \cdot e^{-y^2/13} \end{cases}$

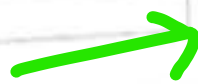
$$F_Y(k) = \frac{2}{13} \left[\frac{y^2}{2} \cdot e^{-y^2/13} - \int y^2/2 \cdot \frac{y}{13} e^{-y^2/13} dy \right] \Big|_0^k$$

$$= \frac{2}{13} \left[\frac{1}{2} y^2 e^{-y^2/13} + \frac{1}{26} \int y e^{-y^2/13} dy \right] \Big|_0^k$$

$$= \frac{2}{13} \left(\frac{1}{2} k^2 e^{-k^2/13} - \frac{1}{4} e^{-k^2} \right)$$

$$F_Y(\sqrt{t}) = \frac{2}{13} \left(\frac{1}{2} t e^{-t/13} - \frac{1}{4} e^{-t} \right) = 0,59$$

no, esto por sustitución



f

$$f_y(k) = \frac{2}{13} \left[\frac{1}{2} y^2 e^{-\frac{y^2}{13}} + \frac{1}{26} \int y e^{-\frac{y^2}{13}} dy \right] \Big|_0^k$$

$$f_y = \frac{2}{13} \left[\frac{1}{2} y^2 e^{-\frac{y^2}{13}} + \frac{1}{26} \cdot \frac{-13}{2} e^{-y^2} \right] \Big|_0^k$$

$$= \frac{2}{13} \left(\frac{1}{8} k^2 e^{-\frac{k^2}{13}} + \frac{1}{26} \cdot \frac{-13}{2} e^{-k^2} \right) = \frac{2}{13} \left(\frac{1}{2} k^2 e^{-\frac{k^2}{13}} - \frac{1}{4} e^{-k^2} \right)$$

$$f_y(\sqrt{t}) = \frac{2}{13} \left(\frac{1}{2} t \cdot e^{-\frac{1}{13}t} - \frac{1}{4} e^{-t} \right) = 0,59$$

$$0,59 = \frac{2}{13} \left(\frac{1}{2} t e^{-\frac{1}{13}t} - \frac{1}{4} e^{-t} \right)$$

$$= \frac{2}{13} \left(\frac{1}{2} t e^{-\frac{1}{13}t} - \frac{1}{4} e^{-t} \right)$$

7) C/EST.

$$F_y(k) = \int_0^k \frac{2}{13} y e^{-y^2/13} dy \quad \left. \vphantom{\int_0^k} \right\} \begin{aligned} u &= \frac{y^2}{13} \rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{2y}{13} \\ dy &= \frac{du}{\frac{2y}{13}} \cdot 13 \end{aligned}$$

$$= \int_0^k \frac{2}{13} y \cdot e^{-u} \frac{du \cdot 13}{2y}$$

$$= \int_0^k -e^{-u} du = -\left[e^{-u} \right]_0^{k^2/13} = 1 - e^{-k^2/13} \quad \checkmark$$

$$u = \frac{y^2}{13} \rightarrow du = \frac{2}{13} y dy \rightarrow dy = \frac{13 du}{2y}$$

$$F_y(k) = \int_0^k \frac{2}{13} y \cdot e^{-u} \cdot \frac{13 du}{2y}$$

$$= \int_0^k e^{-u} du = \left[-e^{-u} \right]_0^{k^2/13} = 1 - e^{-k^2/13}$$

$$F_y(t) = 1 - e^{-t/13}$$

← Aca lo que despues hice fue igualar $F_y(\text{sqrt}(t)) = 0.59$ y despejar t

③ (X, Y) tip

$$f_{xy}(x, y) = 4(1 - (x+y)^2) \quad \left[\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x+y \leq 1 \end{array} \right]$$



$y = 1 - x$

o $P(x+y < 0,42)$?

$$f_{x+y}(t) = \int_0^t f_{xy}(x=u, y=t-u) du, \text{ (convolución)}$$

$$= \int_0^t 4(1 - (u+t-u)^2) du$$

$$= 4 \int_0^t (1 - t^2) du = 4(1 - t^2)t \quad \leftarrow \text{densidad } x+y$$

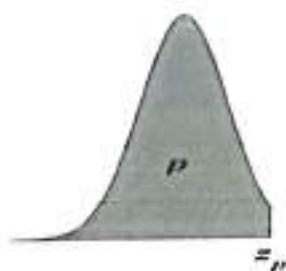
$$F_{x+y}(k) = \int_0^k f_{xy}(u) du = \int_0^k 4(1 - u^2)u du \quad \leftarrow \text{Acumulada } x+y$$

$$= 4 \int_0^k (1 - u^2)u du = 4 \int_0^k u - u^3 du$$

$$= 4 \left(\int_0^k u du - \int_0^k u^3 du \right) = 4 \left(\frac{k^2}{2} - \frac{k^4}{4} \right)$$

luego $F_{x+y}(0,42) = 4 \left(\frac{0,42^2}{2} - \frac{0,42^4}{4} \right) = \underline{0,3217}$

Función de distribución acumulada de una variable normal estandar.



Z_p	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998