Métodos Numéricos

1er Cuatrimestre 2024

1er Parcial (03/05/2024)

DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

Nombre y Apellido:

Libreta Universitaria:

Total de hojas entregadas (sin enunciado): 5

1) 1 2) 1 3) 2 4) 1

Puntajes por resolución de ejercicios y condiciones generales de corrección									
Ej. 1	28	Ej. 2	24	Ej. 3	28	Ej. 4	16	Final	96

El examen se aprueba con 60 puntos. Resolver los ejercicios en hojas separadas. Incluir LU y nombre en hojas y enunciado.	**Justificar <u>todas</u> las respuestas** Puede hacerlo citando resultados de la teórica o la práctica. Para ejercicios de la guía, consulte.

Ejercicio 1 (28 puntos). Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^2 = I$. Sean $S_1 = Nu(A+I)$ y $S_2 = Nu(A-I)$:

a) (5 puntos) Calcular $Ax_1 \ \forall\, x_1 \in S_1$ y $Ax_2 \ \forall\, x_2 \in S_2$.

b) (5 puntos) Probar que $\frac{x-Ax}{2} \in S_1$ y $\frac{x+Ax}{2} \in S_2$.

c) (10 puntos) Probar que $S_1 + S_2 = R^n$ y $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

d) (8 puntos) Calcular $dim(S_2)$ sabiendo que $rg(A+I) = r$ y justificar.

Ejercicio 2 (24 puntos). Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Para las verdaderas, dar una demostración, para las falsas, un contraejemplo:

a) (6 puntos) Si los elementos de la diagonal de A son no nulos, entonces A tiene descomposición LU.

b) (5 puntos) Una matriz inversible y estrictamente diagonal dominante por filas tiene factorización LU.

c) (6 puntos) $\|A\|_1 = \|A^{-1}\|_\infty$ para cualquier matriz inversible $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

d) (6 puntos) $\|A\|_1 = \|A^t\|_\infty$ para cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Ejercicio 3 (28 puntos). Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A = LU$ es la factorización LU de A.

a) (7 puntos) Si A es simétrica, probar que existe D matriz diagonal tal que $U = DL^t$. Sabiendo que si además A es definida positiva entonces D tiene en su diagonal elementos positivos, probar la existencia de la descomposición de Cholesky.

b) (10 puntos) Dados $b \in \mathbb{R}^n$ y $d \in \mathbb{R}_{>0}$, probar que A es SDP si y sólo si $C \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ es SDP:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & db^t \\ 0 & U \end{pmatrix}$$

c) (11 puntos) Además de A, considere $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $M \in \mathbb{R}^{k\times k}$ y $C \in \mathbb{R}^{(k+n)\times(k+n)}$ tales que:

$$C = \begin{pmatrix} M & MB^t \\ BM & BMB^t + A \end{pmatrix}$$

Demostrar que C es SDP si y sólo si tanto A como M son SDP.

Ejercicio 4 (20 puntos).

a) (12 puntos) Sea $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal y triangular superior. Probar que $\forall j = 1, \dots, n,\ col_j(P) = \pm e_j$.

b) (8 puntos) Probar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible, entonces existen únicas matrices Q ortogonal y R triangular superior, tal que $A = QR$, R es inversible y los elementos de su diagonal son positivos.

1] a] Sea $x_1 \in Nu(A+I)$. Como x_1 pertenece al núcleo de dicha t.l., $(A+I)\cdot x_1 = \vec{0}$

Manipulando algebraicamente, $(A+I)\cdot x_1 = \vec{0} \iff Ax_1 + I\cdot x_1 = \vec{0} \iff Ax_1 + x_1 = \vec{0}$

$\iff \boxed{Ax_1 = -x_1}$ Por tanto, para dicho x_1 la t.l. definida por A la como multiplicar por -1.

Similarmente, $x_2 \in Nu(A-I) \iff (A-I)x_2 = \vec{0} \iff Ax_2 - I\cdot x_2 = \vec{0} \iff Ax_2 - x_2 = \vec{0}$

$\iff \boxed{Ax_2 = x_2}$ Por tanto para dicho x_2 la t.l. definida por A la como multiplicar por 1.

b] Ver que $\frac{x-Ax}{2} \in Nu(A+I)$ es equivalente a ver que $(A+I)\cdot\left(\frac{x-Ax}{2}\right) = \vec{0}$:

B

$(A+I)\left(\frac{x-Ax}{2}\right) = \frac{1}{2}\left((A+I)\cdot(x-Ax)\right) = \frac{1}{2}\left(A\cdot x - A\cdot A\cdot x + I\cdot x - I\cdot A\cdot x\right)$

$= \frac{1}{2}\left(A\cdot x - A^2 x + Ix - A\cdot x\right) \overset{A^2 = I \text{ por premisa}}{=} \frac{1}{2}\left(Ax - Ix + Ix - Ax\right) = \frac{1}{2}(\vec{0}) = \vec{0}$ ∴ Vale!

Similarmente, $\frac{x+Ax}{2} \in Nu(A-I) \iff (A-I)\cdot\left(\frac{x+Ax}{2}\right) = \vec{0}$:

$(A-I)\left(\frac{x+Ax}{2}\right) = \frac{1}{2}\left((A-I)\cdot(x+Ax)\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(A\cdot x + A^2 x - I\cdot x - A\cdot x\right)$

$\overset{A^2 = I \text{ por premisa}}{=} \frac{1}{2}\left(Ax + Ix - Ix - Ax\right) = \frac{1}{2}\cdot(\vec{0}) = \vec{0}$ ∴ Vale!

B

c] Para ver que $Nu(A+I) + Nu(A-I)$ genera la totalidad de $\mathbb{R}^n$, vamos a considerar cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ genérico y ver que puede escribirse como una combinación lineal de generadores de $Nu(A+I)$ y $Nu(A-I)$ (a priori no necesariamente forman una base de $\mathbb{R}^n$).

Dado este x genérico, observamos que siempre podemos escribirlo como $x = \frac{x-A\cdot x}{2} + \frac{x+A\cdot x}{2}$.

Por el inciso b], sabemos que $\frac{x-Ax}{2} \in Nu(I+A)$, y por tanto una base $\{y_1, \dots, y_r\}$ de $Nu(A+I)$ representa a $\frac{x-Ax}{2} = \partial_1\cdot y_1 + \dots + \partial_r\cdot y_r$ como una combinación lineal con coeficientes $\partial_1, \dots, \partial_r \in \mathbb{R}$.

Similarmente, por inciso b] sabemos que $\frac{x+Ax}{2} \in Nu(A-I)$, y entonces una base $\{z_1, \dots, z_z\}$ de $Nu(A-I)$ representa a $\frac{x+Ax}{2} = B_1\cdot z_1 + \dots + B_z\cdot z_z$ con coeficientes $B_1, \dots, B_z \in \mathbb{R}$.

Juntando estos resultados, $x = \partial_1\cdot y_1 + \dots + \partial_r\, y_r + B_1\cdot z_1 + \dots + B_z\cdot z_z$, y entonces tenemos un conjunto generador (no necesariamente base) de $\mathbb{R}^n$, ya que elegimos x genérico y aplica para todo.

Por esto, $\mathbb{R}^n \subseteq S_1+S_2$. La vuelta ($S_1+S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$) es trivial por ser $\mathbb{R}^n$ el espacio vectorial.
Habiendo visto la doble inclusión, $S_1+S_2 = \mathbb{R}^n$.

Para ver que $S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\}$, consideremos cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \in S_1 \cap S_2$.
Como $x \in Nu(A+I)$, $(A+I)\cdot x = \vec{0}$. Además, como $x \in Nu(A-I)$, $(A-I)\cdot x = \vec{0}$.
Luego, $\vec{0} = (A+I)\cdot x = (A-I)\cdot x \Rightarrow \cancel{A x} + x = \cancel{A x} - x \Rightarrow x = -x$. Como sabemos, el único vector que cumple esto es $\vec{0}$. Luego, $S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\}$.

¿por qué?

d] ~~El hecho de que el rango de la matriz A+I sea r se traduce a que su t.l. asociada tiene dimensión del núcleo r~~, es decir, $\dim(Nu(A+I))$. Por lo visto en c],

El hecho de que el $rg(A) = r$ se traduce a que su t.l. asociada tiene dimensión de la imagen r; es decir, $\dim(Im(A+I)) = r$. Por el Teorema de la Dimensión, $\dim(Nu(A+I)) + \dim(Im(A+I)) = \dim(\mathbb{R}^n)$
$\therefore \dim(Nu(A+I)) + r = n \Rightarrow \dim(Nu(A+I)) = n-r$.

Por lo visto en el inciso c], $Nu(A+I)$ y $Nu(A-I)$ generan $\mathbb{R}^n$ y no tienen intersección no trivial.
Luego, $\dim(\mathbb{R}^n) = \cancel{\dim(Nu(A+I)) + \dim(Nu(A}\ \dim(S_1+S_2) = \dim(S_1)+\dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$

$$\Rightarrow n = n-r + \dim(S_2) - 0 \Rightarrow \boxed{\dim(S_2) = r}$$

2 a) Falso: Consideremos la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ con diagonal no nula.

Como vimos en la teórica, que una matriz admite la descomposición LU es equivalente a que el algoritmo de Eliminación Gaussiana sin pivoteo pueda ejecutarse sobre la matriz. Ejecutando manualmente:

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 1 F_1} \begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

Observamos que $A^{(1)}$ tiene su pivote $A^{(1)}_{2,2} = 0$ mientras que $A^{(1)}_{3,2} \neq 0$. Sin permutar, el algoritmo no puede proseguir. Luego, A no tiene la factorización LU.

c) Falso: Consideremos la matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$.

Por lo visto en la teórica, podemos definir la norma 1 y ∞ (→ para matrices) equivalentemente como:

$$\|M\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \{\|col_j(M)\|_1\} \quad y \quad \|M\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \{\|fil_i(M)\|_1\}$$

Luego, $\|A\|_1 = \max\{\|(1\ 1)^t\|_1, \|(0\ 2)^t\|_1\} = \max\{(|1|+|1|), (|0|+|2|)\} = 2$

Observamos que $A^{-1} = \begin{pmatrix}1&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, verificable con $\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = I_2$

Además, $\|A^{-1}\|_\infty = \max\{\|(1\ 0)\|_1, \|(-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2})\|_1\} = \max\{(|1|+|0|), (|-\frac{1}{2}|+|\frac{1}{2}|)\} = 1$

Entonces, $\|A\|_1 \neq \|A^{-1}\|_\infty$.

d) Verdadero: Vamos a utilizar las equivalencias de normas matriciales 1 y ∞ vista en el inciso c).

Consideremos $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genérico. $\|A\|_1 \overset{c)}{=} \max_{j=1,\dots,n}\{\|col_j(A)\|_1\}$. Por otro lado,

$\|A^t\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n}\{\|fil_i(A^t)\|_1\}$. Como $fil_i(A^t) = col_i(A)$ por definición de la traspuesta,

$$\|A^t\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n}\{\|col_i(A)\|_1\} = \|A\|_1 \quad \therefore \boxed{\|A\|_1 = \|A^t\|_\infty}$$

b] **Verdadero**: En la teórica vimos dos propiedades que pueden utilizarse de manera muy directa para demostrar esto: que toda matriz estrictamente dominante por filas tiene a todas sus submatrices principales inversibles, y que toda matriz cuyas submatrices principales son todas inversibles posee factorización LU. Aunque dicha demostración fue vista y es válida, luego de consultar veo que la idea es demostrarlo por otro lado. (Esto también es válido)

Para ello, utilizo una propiedad vista en la práctica 2: toda matriz estrictamente dominante por columnas que sea inversible tiene factorización LU. Sea $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cualquier matriz estrictamente dominante por filas inversible. Como $\det(E) = \det(E^t) \neq 0$ y por construcción de e.d.d.f., E^t es e.d.d.c. e inversible, por lo que admite $E^t = L \cdot U$ con L triangular inferior con unos en la diagonal, y U triangular superior. Luego, $E = (L \cdot U)^t = U^t \cdot L^t$, donde U^t triangular inferior y L^t triangular superior. Esto casi es una fact. LU de E, pero ~~ahora~~ U^t no necesariamente tiene unos en la diagonal. (lo de los 1s en la diagonal es un extra) Sin embargo, por otra propiedad vista durante la práctica 2, toda matriz que admite una factorización LU sin que L ~~no~~ tenga unos en la diagonal, admite también una fact. LU que sí lo cumple. Esto es posible ya que podemos reescribir $E = U^t \cdot L^t = U^t \cdot I \cdot L^t = U^t \cdot D \cdot D^{-1} \cdot L^t$, donde $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal definida como $D_{i,i} = (U^t_{i,i})^{-1} \ \forall i$.

Entonces, exhibimos $\tilde{L} = U^t \cdot D$, $\tilde{U} = D^{-1} \cdot L^t$ como ~~A~~ $E = \tilde{L}\tilde{U}$ la factorización LU de E., con $\tilde{L}$ triangular inferior con unos en la diagonal y $\tilde{U}$ triangular superior.

3) a) Sabemos que $A = LU$, con L triangular inferior y $L_{i,i} = 1\ \forall i$; y U triangular superior.
Transponiendo ambos lados, vemos que $A^t = (LU)^t = U^t L^t$ por propiedades conocidas de la transpuesta.
Como A es simétrica, $A = A^t \Rightarrow LU = U^t L^t$. Dado que L es triangular inferior, podemos calcular su determinante como $\det(L) = \prod_{i=1}^{n} L_{i,i} = \prod_{i=1}^{n} 1 = 1 \neq 0$. Por tanto, L es inversible (ya que $\det(M) \neq 0$ si y sólo si M inversible $\forall M \in \mathbb{R}^{n\times n}$). ~~Entonces, podemos despejar~~ Como $\det(L) = \det(L^t) \neq 0$, L^t también es inversible. Entonces, podemos despejar

$LU = U^t L^t \Rightarrow L U (L^t)^{-1} = U^t \Rightarrow U (L^t)^{-1} = L^{-1} \cdot U^t$. Recordando que producto de triangulares inferiores (superiores) es triangular inferior (superior), y que inversa de triangular inferior (superior) es triangular inferior (superior, respectivamente), ~~necesariamente $L^{-1} \cdot U^t$ es~~ además de que transpuesta de triangular inferior (superior) es triangular superior (inferior, respectivamente), necesariamente $L^{-1} \cdot U^t$ es triangular inferior. Además, necesariamente $U (L^t)^{-1}$ es triangular superior. Como ambos términos son iguales, necesariamente $U (L^t)^{-1} = L^{-1} U^t = D$ con D triangular inferior y superior (es decir, diagonal).
Entonces, $U \cdot (L^t)^{-1} = D \Rightarrow U = D ((L^t)^{-1})^{-1} = D \cdot L^t$.

Y recordando ahora que A es def. positiva, y que por tanto $D_{i,i} > 0\ \forall i$, podemos considerar que $\forall i$, $D_{i,i} = \sqrt{D_{i,i}} \cdot \sqrt{D_{i,i}}$. Luego, podemos definir una nueva matriz diagonal $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\tilde{D}_{i,i} = \sqrt{D_{i,i}}$, y entonces vale $D = \tilde{D}\tilde{D}$.
Como antes vimos que $U = D \cdot L^t$, entonces $A = LU = L \cdot D \cdot L^t$. Reemplazando,
$A = L D \cdot L^t = L \cdot \tilde{D} \cdot \tilde{D} \cdot L^t$. Como la traspuesta de toda diagonal es sí misma, $\tilde{D} = \tilde{D}^t$, y entonces $A = L \cdot \tilde{D} \cdot \tilde{D} \cdot L^t = (L \cdot \tilde{D})(\tilde{D}^t \cdot L^t) = (L \cdot \tilde{D}) \cdot (L \cdot \tilde{D})^t = \tilde{L} \cdot \tilde{L}^t$ con $\tilde{L} = L \cdot \tilde{D}$.
Como L tenía unos en la diagonal, y $\tilde{D}$ tiene positivos en la diagonal, $\tilde{L}$ tiene positivos en la diagonal.
Entonces, $\tilde{L}$ es una triangular inferior con positivos en la diagonal y por tanto $A = \tilde{L} \cdot \tilde{L}^t$ es una (la única) descomposición de Cholesky de A s.d.p.

b) Para ver A sdp $\Leftrightarrow$ C sdp, separamos en ida $\Rightarrow$ y vuelta $\Leftarrow$:

$\Rightarrow$) Como A s.d.p., vimos en el inciso a) que ~~$A = L\tilde{D}\tilde{D}L^t$ con $\tilde{D}$ la de la diag. y L de la fact. LU.~~

$A = \tilde{L}\tilde{L}^t$ con $\tilde{L}$ tri. inferior con diagonal positiva. Para ver que C es sdp, basta con ver/exhibir su fact. de Cholesky. Entonces, queremos hallar $\bar{L} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ tri. inferior con diagonal positiva tal que:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & d\cdot b^t \\ 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & d\cdot b^t \\ d\cdot b & d\cdot b\cdot b^t + L\cdot U \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} \overline{L_{11}}\cdot\overline{L_{11}}^t & \overline{L_{11}}\cdot\overline{L_{21}}^t \\ \overline{L_{21}}\cdot\overline{L_{11}}^t & \overline{L_{21}}\cdot\overline{L_{21}}^t + \overline{L_{22}}\cdot\overline{L_{22}}^t \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} \overline{L_{11}} & 0 \\ & \end{pmatrix}}$$

con $\bar{L}$ en bloque tal que $\overline{L_{11}} \in \mathbb{R}$, $\overline{L_{21}} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, y $\overline{L_{22}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. El $\overset{?}{=}$ representa lo que queremos satisfacer.

$$= \begin{pmatrix} \overline{L_{11}} & 0 \\ \overline{L_{21}} & \overline{L_{22}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{L_{11}} & 0 \\ \overline{L_{21}} & \overline{L_{22}} \end{pmatrix}^t = \bar{L}\cdot\bar{L}^t$$

Observamos que la multiplicación en bloques se encuentra bien definida. Igualamos cada bloque:

$$\begin{cases} d = \overline{L_{11}}\cdot\overline{L_{11}}^t \\ d\cdot b^t = \overline{L_{11}}\cdot\overline{L_{21}}^t \\ d\cdot b = \overline{L_{11}}^t\cdot\overline{L_{21}} \\ d\cdot b\cdot b^t + L\cdot U = \overline{L_{21}}\,\overline{L_{21}}^t + \overline{L_{22}}\cdot\overline{L_{22}}^t \end{cases}$$

De la primera ecuación, observamos que como $\overline{L_{11}} \in \mathbb{R}$, $d = \overline{L_{11}}\cdot\overline{L_{11}}^t \iff d = \overline{L_{11}}^2$. Como $d > 0$, podemos despejar $|\overline{L_{11}}| = \sqrt{d}$. Para que $\bar{L}$ tenga diagonal positiva, necesitamos $\boxed{\overline{L_{11}} = \sqrt{d}}$. ✓

De la segunda (y tercera ecuación) obtenemos $d\cdot b^t = \overline{L_{11}}\cdot\overline{L_{21}}^t \iff d\cdot b^t = \sqrt{d}\cdot\overline{L_{21}}^t$, como $d > 0$ $\iff \sqrt{d}\cdot b^t = \overline{L_{21}}^t \iff \boxed{\overline{L_{21}} = \sqrt{d}\cdot b}$ No necesitamos nada particular de los coeficientes de $\overline{L_{21}}$. ✓

Finalmente, de la cuarta ecuación obtenemos $d\cdot bb^t + L\cdot U = \overline{L_{21}}\cdot\overline{L_{21}}^t + \overline{L_{22}}\cdot\overline{L_{22}}^t$. Como A sdp, $A = L\cdot U = \tilde{L}\cdot\tilde{L}^t$ con su fact. de Cholesky. Luego, $d\cdot b\cdot b^t + \tilde{L}\cdot\tilde{L}^t = \sqrt{d}\cdot b\cdot\sqrt{d}\cdot b^t + \overline{L_{22}}\cdot\overline{L_{22}}^t$
$\iff d\cdot b\cdot b^t + \tilde{L}\cdot\tilde{L}^t - \sqrt{d}\sqrt{d}\cdot b\cdot b^t = \overline{L_{22}}\cdot\overline{L_{22}}^t \iff \cancel{d\cdot bb^t} + \tilde{L}\cdot\tilde{L}^t - \cancel{d\cdot bb^t} = \overline{L_{22}}\cdot\overline{L_{22}}^t$
$\iff \tilde{L}\cdot\tilde{L}^t = \overline{L_{22}}\cdot\overline{L_{22}}^t \iff \boxed{\overline{L_{22}} = \tilde{L}}$ Esto cumple que $\overline{L_{22}}$ sea triangular inferior con diagonal positiva.

no está la justificación para [illegible] $\overline{L_{22}} = \tilde{L}$

Luego, exhibimos $C = \bar{L}\cdot\bar{L}^t$ con $\bar{L} = \begin{pmatrix} \sqrt{d} & 0 \\ \sqrt{d}\cdot b & \tilde{L} \end{pmatrix}$, la cual es triangular inferior con diagonal positiva y por tanto una fact. de Cholesky válida. Luego, C es sdp. ✓

$\Leftarrow$) Si en cambio asumimos que C es sdp, sabemos que posee fact. de Cholesky $C = \bar{L} \cdot \bar{L}^t$. Por lo visto en la ecuación cuatro del de la ida, vale que $A = \bar{L}_{22} \cdot \bar{L}_{22}^t$, pero esta vez no sabemos si pasa si $A \overset{?}{=} \bar{L} \cdot \bar{L}^t$. Sin embargo, justamente porque $\bar{L}_{22}$ es triangular inferior con diagonal positiva (por ser $\bar{L}$ lo mismo) y porque $A = \bar{L}_{22} \cdot \bar{L}_{22}^t$, esta es una fact. de Cholesky válida para A, y por tanto es sdp. ✓ Explicaciones

c) Procedemos de manera muy similar al inciso anterior: veremos la ida y la vuelta por separado de A sdp $\wedge$ M sdp $\Leftrightarrow$ C sdp.

$\Rightarrow$) Igual al inciso anterior, buscaremos explícitamente la fact. $C = \bar{L} \cdot \bar{L}^t$ de C.

$$C = \begin{pmatrix} M & MB \\ BM & BMB^t + A \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} \bar{L}_{11} \cdot \bar{L}_{11}^t & \bar{L}_{11} \cdot \bar{L}_{21}^t \\ \bar{L}_{21} \cdot \bar{L}_{11}^t & \bar{L}_{21} \cdot \bar{L}_{21}^t + \bar{L}_{22} \cdot \bar{L}_{22}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{L}_{11} & 0 \\ \bar{L}_{21} & \bar{L}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{L}_{11}^t & \bar{L}_{21}^t \\ 0 & \bar{L}_{22}^t \end{pmatrix}$$

Esta vez, $\bar{L}_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $\bar{L}_{21} \in \mathbb{R}^{(n+k) \times k}$ y $\bar{L}_{22} \in \mathbb{R}^{(k+n) \times (k+n)}$. Igualamos cada bloque:

$$\begin{cases} M = \bar{L}_{11} \cdot \bar{L}_{11}^t \\ MB = \bar{L}_{11} \cdot \bar{L}_{21}^t \\ BM = \bar{L}_{21}^t \cdot \bar{L}_{11}^t \\ BMB^t + A = \bar{L}_{21} \cdot \bar{L}_{21}^t + \bar{L}_{22} \cdot \bar{L}_{22}^t \end{cases}$$

De la primera ecuación, como M sdp y entonces $M = \tilde{M} \cdot \tilde{M}^t$ con su Cholesky, obtenemos $\tilde{M} \cdot \tilde{M}^t = \bar{L}_{11} \cdot \bar{L}_{11}^t \Leftrightarrow \underbrace{\{\bar{L}_{11} = \tilde{M}\}}$ cumple por ser triangular inferior con positivos en la diagonal. ✓

De la segunda (y tercera) obtenemos $MB = \bar{L}_{11} \cdot \bar{L}_{21}^t \Leftrightarrow \tilde{M} \cdot \tilde{M}^t \cdot B = \tilde{M} \cdot \bar{L}_{21}^t$

Como $\tilde{M}$ ~~triangular~~ es inversible, hacemos $\tilde{M} \cdot \tilde{M}^t B = \tilde{M} \bar{L}_{21}^t \Leftrightarrow \underbrace{\{\tilde{M}^t \cdot B = \bar{L}_{21}^t\}} \Leftrightarrow \underbrace{\{\bar{L}_{21} = B^t \tilde{M}\}}$ ✓

Dado que la diagonal principal de $\bar{L}$ nunca "pasa" por $\bar{L}_{21}$, tampoco necesitamos nada de este bloque ✓

De la cuarta ecuación obtenemos $BMB^t + A = \bar{L}_{21} \cdot \bar{L}_{21}^t + \bar{L}_{22} \cdot \bar{L}_{22}^t$. Usando $M = \tilde{M}\tilde{M}^t$ y $A = \tilde{A} \cdot \tilde{A}^t$ definida igual, queda $B\tilde{M}\tilde{M}^t B^t + \tilde{A}\tilde{A}^t = B^t \tilde{M} \cdot \tilde{M}^t \cdot B + \bar{L}_{22} \cdot \bar{L}_{22}^t$

$\Leftrightarrow B\tilde{M}\tilde{M}^t B^t + \tilde{A}\tilde{A}^t - B\tilde{M}\tilde{M}^t B = \bar{L}_{22} \cdot \bar{L}_{22}^t \Leftrightarrow \tilde{A}\tilde{A}^t = \bar{L}_{22} \cdot \bar{L}_{22}^t \overset{✗}{\Leftrightarrow} \underbrace{\{\bar{L}_{22} = \tilde{A}\}}$

De manera análoga al ítem anterior, como $\tilde{A}$ es tri. inf. con diagonal positiva, ~~se cumple~~ cumple lo pedido para $\overline{L_{22}}$ de forma tal que $\overline{L}$ sea tri. inf. con diag. positiva. Lo mismo para $\overline{L_{11}} = \tilde{M}$.

Entonces, con $C = \overline{L} \cdot \overline{L}^t$ tenemos la Cholesky de C y por tanto es sdp. ✓

$\Leftarrow$ Muy similar a lo visto en el inciso anterior, requerimos que $\overline{L_{11}} = \tilde{M}$ y $\overline{L_{22}} = \tilde{A}$ sean tri. inf. con positivos en diagonal, lo cual solo vale si A y M son sdp. Por tanto si C es sdp, $A = \tilde{A}\tilde{A}^t$, $M = \tilde{M}\tilde{M}^t$ y por tanto A y M sdp. ✓ [illegible]

(me faltó tiempo para explicar más en detalle, pero es la ~~[illegible]~~ misma idea que $\boxed{b}$)

10 [4] a] Como P es ~~ortogonal~~, triangular superior, sabemos que calculamos su determinante como $\det(P) = \prod_{i=1}^{n} p_{i,i}$. Al ser ortogonal, sabemos por propiedad que $|\det(P)| = 1$, por lo que $\left|\prod_{i=1}^{n} p_{i,i}\right| = \prod_{i=1}^{n} |p_{i,i}| = \pm 1$. Intuitivamente, esto es cierto cuando todo coeficiente en la diagonal es ± 1, pero a priori podría ocurrir que algunos coeficientes sean mayores en módulo a 1 mientras que otros sean menores, y que logren cancelarse entre sí para dar valor absoluto 1. Veamos por el absurdo que esto no puede ocurrir: si alguno de los coeficientes es menor en módulo que 1, necesariamente algún $p_{m,m}$ debe tener valor absoluto mayor a 1, ya que si uno es menor en módulo que 1 y el resto son menores o iguales en módulo a 1, es fácil ver que $\prod_{i=1}^{n} |p_{i,i}| < 1$. Luego, $\exists m / |p_{m,m}| > 1$. Pero entonces, consideremos que, por ser P ortogonal, $\|P \cdot e_m\|_2 = \|e_m\|_2 = 1$. Sin embargo, $\|P \cdot e_m\|_2 = \|col_m(P)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_{i,m}^2} = \sqrt{p_{m,m}^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{n} p_{i,m}^2} \geq \sqrt{p_{m,m}^2} = |p_{m,m}| > 1$. Entonces, $\|P \cdot e_m\|_2 \neq \|e_m\|_2 = 1$, y hallamos un absurdo proveniente de suponer que existe $|p_{i,i}| \neq 1$.

Sabiendo que cada coeficiente de la diagonal es ± 1, consideremos que $\forall 1 \leq i \leq n$, se debe satisfacer $\|P \cdot e_i\|_2 = \|e_i\|_2 = 1$. Como $\|P \cdot e_i\|_2 = \|col_i(P)\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} p_{j,i}^2} = \sqrt{p_{i,i}^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} p_{j,i}^2} = 1$, necesariamente $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} p_{j,i}^2 = 0$. Luego, $p_{j,i} = 0 \ \forall j \neq i$, y entonces todo coeficiente fuera de la diagonal es nulo. Entonces, P cumple que $(\forall i,j)\left(p_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \pm 1 & \text{si } i = j \end{cases}\right)$, y por tanto $(\forall j)(col_j(P) = \pm e_j)$.

9 b] Para esta demostración, asumamos que A admite dos factorizaciones QR con las condiciones estipuladas, y veamos que en realidad son la misma. Tenemos $A = Q \cdot R = \tilde{Q} \cdot \tilde{R}$, con Q y $\tilde{Q}$ ortogonales, y R y $\tilde{R}$ triangulares superiores con coeficientes positivos en la diagonal. Como el determinante de R y $\tilde{R}$ es el producto de los elementos en su diagonal y estos son positivos, $\det(R) \neq 0$ y $\det(\tilde{R}) \neq 0$, por lo que

ambas son inversibles. Manipulando algebraicamente, $A = Q \cdot R = \tilde{Q} \cdot \tilde{R} \Rightarrow Q \cdot R \cdot \tilde{R}^{-1} = \tilde{Q}$ $\Rightarrow R \cdot \tilde{R}^{-1} = Q^{-1} \cdot \tilde{Q}$ (por ser ortogonal, Q es inversible). Como el producto de ortogonales es ortogonal (y la inversa de ortogonal también lo es), $Q^{-1} \cdot \tilde{Q}$ es ortogonal. ~~Y~~ Similarmente, como ~~el~~ producto de triangulares superiores con diagonal positiva es triangular superior con diagonal positiva (y la inversa también lo es), $R \cdot \tilde{R}^{-1}$ es triangular superior con diagonal positiva. Pero entonces $\Omega = R \cdot \tilde{R}^{-1} = Q^{-1} \cdot \tilde{Q}$ es ambas a la vez, y por tanto ~~∃~~ ~~es~~ vale que $(\forall j)(col_j(\Omega) = \pm e_j)$. Más aún, como su diagonal es positiva, es imposible que $\exists j \,/\, col_j(\Omega) = -e_j$, por lo que $(\forall j)(col_j(\Omega) = e_j)$ y entonces $\Omega = I$.

Se podría justificar esto

Luego, $R \cdot \tilde{R}^{-1} = I \Rightarrow R = I \cdot ((\tilde{R})^{-1})^{-1} \Rightarrow \boxed{R = \tilde{R}}$

Simétricamente, $Q^{-1} \cdot \tilde{Q} = I \Rightarrow \tilde{Q} = (Q^{-1})^{-1} \cdot I \Rightarrow \boxed{Q = \tilde{Q}}$

Podemos concluir entonces que necesariamente dicha factorización es única.

Faltó probar existencia.

Sabemos que existe factorización QR con Q ortogonal y R ∇ pero no si ∃ con R ∇, inversible y con $r_{ii} > 0$ $\forall i = 1..n$