10 (diez)

1	2	3	4
B	B	B-	B

Probabilidades y Estadística (C)
Examen Final
(12/12/06)

Nombre y Apellido: Gonzalo Sainz-Trápaga

N° de libreta: 454/06 N° de hojas entregadas: 4

e-mail: gomo@datafull.com

El examen final se aprueba con 50 puntos

Enuncie las propiedades que utiliza

---

1. **(25 puntos)**

   (a) Enunciar y demostrar la desigualdad de Markov.

   (b) Enunciar y demostrar la desigualdad de Tchebychev.

   (c) Enunciar y demostrar la Ley de los grandes Números.

   (d) Sea p la probabilidad de que una persona elegida al azar apoye la legalización de la marihuana. Se toma una muestra de 50 personas elegidas al azar, se les pregunta si apoyan o no la legalización y se estima p a partir de la frecuencia relativa fr que se define por

   $$fr = \frac{\text{No de personas encuestadas que están a favor de la legalización}}{50}$$

   Hallar una cota superior para $P(|fr - p| > 0.1)$ que no dependa de p.

2. **(25 puntos)** Probar que

   (a) Si X e Y son v.a. independientes con distribución de Poisson de parámetro λ y μ respectivamente, entonces $X + Y$ tiene distribución $P(\lambda + \mu)$.

   (b) Bajo las mismas hipótesis que en a), $X|_{X+Y=k}$ tiene distribución $Bi(k, \lambda/(\lambda+\mu))$.

   (c) Si $X \sim P(\lambda)$ e $Y|_{X=k} \sim Bi(k,p)$, entonces Y tiene distribución $P(\lambda p)$.

3. **(25 puntos)** Supongamos que $X_1, \ldots, X_n$ son v.a. independientes con distribución $N(0, \sigma^2)$.

   (a) Hallar $\hat{\sigma}_n^2$, el estimador de máxima verosimilitud de σ^2.

   (b) ¿ Es $\hat{\sigma}_n^2$ es un estimador insesgado de σ^2. Justificar detalladamente.

   (c) ¿ Es $\hat{\sigma}_n$ un estimador consitente de σ? Justificar detalladamente.

4. **(25 puntos)**

   (a) Supongamos que $X_1, \ldots, X_n$ son v.a. independientes con distribución $\mathcal{E}(\lambda)$. Cada una mide el tiempo de espera hasta que se produce un llamado de alarma en un sistema de seguridad (medido en horas) en pruebas independientes. Deducir un intervalo de confianza de nivel exacto 0.95 para el tiempo medio de espera hasta que se produzca un llamado de alarma en el sistema basado en la muestra. Justificar.

(b) Sea π la probabilidad de que el tiempo de espera sea superior a una hora. Proponer un intervalo de confianza de nivel 0.95 para π basado en la muestra anterior.

(c) Supongamos que se realizaron las siguientes 10 mediciones y se obtuvieron los siguientes datos:

$$1.50, 0.78, 0.41, 0.06, 0.10, 1.12, 0.12, 0.03, 1.02, 0.40$$

Calcule los intervalos hallados en a) y b) basándose en estos datos.

$S_c \xi_c \varrho$

$P(x_c^{\circ} > 1) = \pi.$