Lógica y Computabilidad – Recuperatorio del Segundo Parcial

1er Cuatrimestre de 2018 – 20/7/2018

Empezar cada ejercicio en hoja nueva. Numerar y poner nombre a todas las hojas. Se pueden utilizar todas las macros y los resultados sobre funciones computables y recursivas primitivas vistos en clase. Justificar todas las respuestas.

---

1. Sea ψ una función unaria recursiva primitiva. Definimos la función binaria f como
$$f(n,x) = \psi^n(x) + x^n,$$
es decir, $f(0,x) = x+1$, $f(1,x) = \psi(x) + x$, $f(2,x) = \psi(\psi(x)) + x^2$, etc.
   a) Probar que f es computable.
   b) Probar que f es recursiva primitiva.

---

2. Sea F la función binaria dada por
$$\begin{aligned} F(0,0) &= 0, \\ F(0,1) &= 1, \\ F(0,y) &= F(0,y-1) + F(0,y-2), \quad y > 1, \\ F(x,y) &= F\big(x-1, F(x-1,y+1)\big), \quad x > 0. \end{aligned}$$
¿Es F una función computable?

---

3. Sea B un conjunto recursivo y P el predicado dado por $P(x) \leftrightarrow x \in B$. Definamos
$$g(x) = \mathrm{HALT}\big(x, P(x)\big) \quad \text{y} \quad h(x) = \Phi\big(P(x), x\big).$$
   a) Probar que g es computable.
   b) Probar que h no es computable.
   c) ¿Es h parcialmente computable?

---

4. Sea P un predicado unario computable y f la función definida como
$$f(n) = \begin{cases} 4 \cdot 3^{29} & \text{si} \quad P(n) \\ 9 \cdot 2^{29} & \text{si} \quad \neg P(n). \end{cases}$$
Definimos además $g(n) = \Phi\big(f(n), f(n)\big)$.
   a) Probar que g es parcialmente computable.
   b) ¿Es $Dom(g)$ un conjunto recursivo?