Recuperatorio de Lógica

Lógica y Computabilidad

25 de julio de 2008

Este examen se aprueba obteniendo al menos **6 puntos**. El parcial es a libro abierto y se puede suponer demostrado todo lo que se dio en clase, colocando referencias claras. En el caso de usar resultados de las guías de ejercicios, se deben incluir las demostraciones.

Ejercicio 1. Se definen $\mathrm{Pos}(\varphi)$ y $\mathrm{Neg}(\varphi)$, el conjunto de variables proposicionales que aparecen con *polaridad* positiva y negativa, respectivamente, en φ de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{lcl|lcl}
\mathrm{Pos}(p) & = & \{p\} & \mathrm{Neg}(p) & = & \emptyset \\
\mathrm{Pos}(\neg\varphi) & = & \mathrm{Neg}(\varphi) & \mathrm{Neg}(\neg\varphi) & = & \mathrm{Pos}(\varphi) \\
\mathrm{Pos}(\psi \to \varphi) & = & \mathrm{Neg}(\psi) \cup \mathrm{Pos}(\varphi) & \mathrm{Neg}(\psi \to \varphi) & = & \mathrm{Pos}(\psi) \cup \mathrm{Neg}(\varphi)
\end{array}
$$

I. (**2 p.**) Demostrar que si $v \models \mathrm{Pos}(\varphi)$ y $\overline{v} \models \mathrm{Neg}(\varphi)$, entonces $v \models \varphi$ y $\overline{v} \not\models \varphi$, donde $\overline{v}(x) = 1 - v(x)$.

II. (**1 p.**) Sea φ tal que $\mathrm{Pos}(\varphi) \cap \mathrm{Neg}(\varphi) = \emptyset$. Decidir si φ es tautología, contingencia o contradicción. Justificar.

Ejercicio 2. Dados un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$, una enumeración $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ de todas las $\mathcal{L}$-fórmulas, y una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$, definimos la siguiente familia de conjuntos:

$$
\begin{array}{lcl}
\Gamma^0 & = & \emptyset \\
\Gamma^{i+1} & = & \begin{cases} \Gamma_i \cup \{\varphi_i\} & \text{si } \Gamma_i \not\vdash \varphi_i \text{ y } \mathcal{M} \models \varphi_i \\ \Gamma_i & \text{en caso contrario} \end{cases} \\
\Gamma^\omega & = & \bigcup_{i \geq 0} \Gamma_i
\end{array}
$$

I. (**2 p.**) Demostrar que Γ^ω es correcto y completo respecto a $\mathcal{M}$.

II. (**1 p.**) ¿Es Γ^ω un conjunto maximal consistente? Justificar.

Ejercicio 3. (**2 p.**) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad para razonar sobre árboles que posea un símbolo de relación binario R. Informalmente, leeremos $R(a,b)$ como "a es padre de b". Demostrar que no es posible dar una fórmula de $\mathcal{L}$, $\varphi(x)$, con sólo una variable libre, x, tal que $\mathcal{M}, v \models \varphi(x)$ sii $v(x)$ no tiene ninguna rama infinita.

Ejercicio 4. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar:

I. (**1 p.**) "Si Γ es un conjunto r.e. de fórmulas de primer orden, $\{\varphi \mid \Gamma \vdash \varphi\}$ es r.e."

II. (**1 p.**) "Para toda sentencia satisfacible φ, existe un modelo finito $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi$"