NOMBRE Y NRO. LIBRETA:

| 1 | 2 | 3 | 4 | Calif. |
|---|---|---|---|---|
| X | INC | M/X | X | INS |

# ÁLGEBRA LINEAL - SEGUNDO PARCIAL

1er cuatrimestre 2012 (10/7/2012)

1. Sea $k \in \mathbb{N}$ y sea $A \in \mathbb{R}^{2k\times 2k}$ una matriz tal que $A^2 + I_{2k} = 0$.
   (a) Hallar la forma racional de $A$ sobre $\mathbb{R}$.
   (b) Probar que $A$ es semejante sobre $\mathbb{R}$ a la matriz por bloques
   $$\begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}.$$
   [$I_n$ denota la matriz identidad de tamaño $n \times n$.]

2. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz cuyo polinomio característico es $(x-1)^n$. Probar que $A^2$ es semejante a $A$.

3. Sea $V = \mathbb{R}_n[X]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que $n$.
   (a) Probar que $\langle p, q\rangle := \sum_{k=0}^{n} p(k)q(k)$ define un producto interno en $V$.
   (b) Sea $T$ el endomorfismo de $V$ dado por la derivación. ¿Cuántos subespacios de $V$ de dimensión $n-1$ son $T^*$-invariantes? Para el caso $n = 3$ exhibir una base de cada uno de ellos.

4. Consideremos las rectas $L_1, L_2, L_3 \subseteq \mathbb{R}^3$ dadas por
   $$\begin{aligned} L_1 &: \quad \lambda(1,1,1) + (1,2,3), \\ L_2 &: \quad \lambda(1,1,1) + (0,-1,1), \\ L_3 &: \quad \lambda(1,1,1) + (3,0,0). \end{aligned}$$
   (a) Hallar una transformación ortogonal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(L_1) = L_2$ y $f(0,1,2) = (1,0,2)$.
   (b) Probar que no existe una transformación ortogonal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g(L_1) = L_3$.

Justifique todas sus respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.