Recuperatorio de Lógica

Lógica y Computabilidad

15 de Marzo, 2008

Este examen se aprueba obteniendo al menos **60 puntos**. El parcial es a libro abierto y se puede suponer demostrado todo lo que se dio en clase, colocando referencias claras. En el caso de usar resultados de las guías de ejercicios, se deben incluir las demostraciones.

Ejercicio 1. (**15 p**) Una *teoría* Γ *cerrada por consecuencia* es un conjunto de sentencias tal que para cualquier sentencia φ del lenguaje, si $\Gamma \models \varphi$ entonces $\varphi \in \Gamma$. Decimos que una teoría Γ es *completa* si para cada sentencia φ sucede que $\varphi \in \Gamma$ o bien $\neg\varphi \in \Gamma$. Sean Γ_1 y Γ_2 dos teorías cerradas por consecuencia, en el mismo lenguaje, tal que $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, Γ_1 es completa y Γ_2 es satisfacible. Demostrar que $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

Ejercicio 2. (**25 p**) Dado un conjunto de fórmulas de primer orden Σ, demostrar que si existe un conjunto finito de fórmulas Γ tal que $Con(\Gamma) = Con(\Sigma)$, entonces existe un conjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que $\Sigma_0 \models \Sigma$. Ayuda: usar alguna de las formulaciones del teorema de compacidad.

Ejercicio 3. (**45 p**) Vamos a llamar $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}; 0; suc \rangle$ al modelo usual de los números naturales con cero y sucesor. Considerar un lenguaje de primer orden con igualdad $\mathcal{L}$ con un símbolo de constante 0 y un símbolo unario de función *suc*. Sea la siguiente axiomatización SQ_N, que extiende a SQ con infinitos axiomas:

S1	$(\forall x) suc(x) \neq 0$	
S2	$(\forall x)(\forall y)(suc(x) = suc(y) \rightarrow x = y)$	
S3	$(\forall y)\big(y \neq 0 \rightarrow (\exists x)(y = suc(x))\big)$	
S4$_n$	$(\forall x)(suc^{(n)}(x) \neq x)$	para todo $n > 1$

a) (**10 p**) Demostrar que $S1$ y toda instancia de $S4_n$ es verdadera en $\mathcal{N}$.

b) (**25 p**) Demostrar que para cualquier subconjunto finito Γ de axiomas de SQ_N existe un modelo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$ pero $\mathcal{M} \not\models SQ_N$.

c) (**10 p**) Sabiendo que SQ_N es correcta y completa con respecto a $\mathcal{N}$, demostrar que ninguna axiomatización correcta y finita de primer orden es completa con respecto a $\mathcal{N}$. Sugerencia, aplicar el Ejercicio 2 al ítem anterior.

Ejercicio 4. (**15 p**)

Demostrar que la siguiente sentencia de primer orden φ es satisfacible en cada modelo $\mathcal{M}$ (que posea una relación binaria y una función unaria) cuyo universo sea finito.

$$\varphi = (\exists x)(\exists y)(\exists z)\big((P(x, f(x)) \rightarrow P(x, x)) \vee (P(x, y) \wedge P(y, z) \wedge \neg P(x, z))\big)$$