Métodos Numéricos
26 de noviembre de 2021
Recuperatorio
Segundo Parcial

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

☐ Completar apellido en las hojas y numerarlas ☐ Enviar aquí fotos claras y legibles de la resolución ☐ **Justificar todas las respuestas**	Nombre y Apellido Ej. 1 | Ej. 2 | Ej. 3 | Nota

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz tal que $A^t = A = A^{-1}$.

   (a) ¿Cuánto vale el determinante de A? ¿Es A diagonalizable? (10 puntos)

   (b) Calcular Σ de la factorización SVD de A. Justificar. (10 puntos)

   (c) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Para cada una de las siguientes matrices U, obtener Σ y V tal que $A = U\Sigma V^t$ sea una factorización SVD de A. (15 puntos)

      i. $U = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

      ii. $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Se desea resolver un sistema de la forma $Ax = b$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{13}{12} \\ 0 & \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Se propone el método iterativo $x_{n+1} = (I - A)x_n + b$. Probar que si el método converge, entonces converge a una solución de $Ax = b$. (7 puntos)

   (b) Demostrar que el método iterativo propuesto en el ítem anterior converge. (13 puntos)

   (c) ¿Es posible aplicar los métodos de Jacobi o Gauss-Seidel? Justifique. (5 puntos)

   (d) Probar que los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen si se permutan las filas 2 y 3 de la matriz A. (10 puntos)

3. La ecuación de una circunferencia C en el plano $\mathbb{R}^2$ de centro (x_0, y_0) y radio r puede escribirse como $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

   (a) Probar que la ecuación de la circunferencia puede reescribirse en la forma $C : ax^2 + ay^2 + bx + cy = 1$, con determinados $a, b, c \in \mathbb{R}$. (6 puntos)

   (b) Se dispone de una serie de n puntos (x_i, y_i) con $(1 \leq i \leq n)$ en el plano $\mathbb{R}^2$ y se requiere encontrar la circunferencia que mejor los aproxima en el sentido de cuadrados mínimos usando la expresión del ítem anterior. Hallar la matriz A, el vector de incógnitas x y el vector b, junto con sus dimensiones, para los que el problema de encontrar la circunferencia se reduce a encontrar un x apropiado que minimiza $||Ax - b||_2$. (12 puntos)

   (c) Si se sabe que los primeros cuatro puntos de la serie del ítem anterior son los siguientes:

i	1	2	3	4
x_i	1	0	1	1
y_i	0	1	-1	1

   determinar la cantidad de soluciones que tiene el problema de cuadrados mínimos planteado. (12 puntos)

1	2	3	Total
35	33	24	92

HOJA Nº 1

FECHA

EJERCICIO 1:

a) COMO $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ES UNA MATRIZ TAL QUE $A^t = A = A^{-1}$ SE CUMPLE QUE:

- ES SIMÉTRICA, YA QUE $A^t = A$.
- ES ORTOGONAL, YA QUE $A^t = A^{-1}$.

→ COMO ES ORTOGONAL SABEMOS QUE SU DETERMINANTE ES 1 ó −1.

→ COMO A ES SIMÉTRICA, SABEMOS QUE TODOS SUS AUTOVALORES SON REALES Y QUE ADEMÁS TIENE BASE ORTONORMAL DE AUTOVECTORES.
POR LO TANTO, COMO TIENE BASE DE AUTOVECTORES ES DIAGONALIZABLE.

NOTA

1) b)

YA LO VI AL RESOLVER PRIMERO EL EJERCICIO 1.C) PERO COMO $A^t = A$, AL QUERER BUSCAR LOS VALORES SINGULARES VIENDO LOS AUTOVALORES DE A^tA, RESULTA QUE:

$$\underset{A^t = A}{A^t A} = \underset{A^{-1} = A}{A A} = A A^{-1} = I$$

POR LO TANTO AL BUSCAR LOS σ_i VALORES SINGULARES COMO $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ CON λ_i AUTOVALORES DE A^tA, BUSCAMOS LOS AUTOVALORES DE LA MATRIZ IDENTIDAD, QUE SON $\lambda_i = 1 \ \forall i = 1 \dots n$ (AUTOVALOR 1 CON MULTIPLICIDAD n).

ENTONCES $\sigma_i = \sqrt{1} = 1 \ \forall i = 1 \dots n$ POR LO TANTO $\Sigma = I$.

HOJA N° 3

FECHA

1.c)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) $$U = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

QUEREMOS OBTENER UNA FACTORIZACIÓN SVD DE A.

COMO $A \in \mathbb{R}^{2\times2} \Rightarrow A = U \Sigma V^t$, con $U \in \mathbb{R}^{2\times2}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{2\times2}$, $V^t \in \mathbb{R}^{2\times2}$

LUEGO BUSCO LOS AUTOVALORES λ_i DE A^tA YA QUE LOS VALORES SINGULARES QUE PERTENECEN A LA DIAGONAL DE Σ SON $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$

$$A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I}$$

LUEGO VEO SUS AUTOVALORES:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) = 1-\lambda-\lambda+\lambda^2$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$$

$$\Rightarrow \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{1} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

AHORA CALCULO V SABIENDO QUE

$$A = U\Sigma V^t$$
$$U^tA = \Sigma V^t$$
$$\Sigma^t U^t A = V^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = V^t$$

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = V^t$$

$$\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} = V^t \Rightarrow V = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$$

NOTA

POR LO TANTO:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}}_{V^t}$$ ✓

CORROBORO QUE DE:

$$\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5}\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\frac{3}{5} & \frac{3}{5}\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$ ✓

ii) $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

COMO ES LA MISMA A, YA SÉ QUE $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ POR i)

LUEGO CALCULAMOS V^t DE LA MISMA FORMA:

$$V^t = \Sigma^t U^t A$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$ ✓

POR LO TANTO:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{V^t}$$

CORROBORO:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$ ✓

⑤ HOJA

FECHA

EJERCICIO 2:

a) $x_{n+1} = (\mathbb{I} - A)\, x_n + b$

LLAMEMOS x^* LA SOLUCIÓN A LA QUE CONVERGE EL MÉTODO. LUEGO:

$$x^* = (\mathbb{I} - A)\, x^* + b$$

$$x^* = x^* - Ax^* + b$$

$$\cancel{x^*} - \cancel{x^*} + Ax^* = b \Rightarrow Ax^* = b$$

POR LO TANTO CONVERGE A UNA SOLUCIÓN DE $Ax = b$.

b) $T = \mathbb{I} - A$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -4/5 & 0 & -13/12 \\ 0 & 3/5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 4/5 & 1 & 13/12 \\ 0 & -3/5 & 0 \end{pmatrix}$$

PARA QUE UN MÉTODO ITERATIVO CONVERJA $\rho(T) < 1$

VEO LOS AUTOVALORES DE T:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 \\ 4/5 & 1-\lambda & 13/12 \\ 0 & -3/5 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 13/12 \\ -3/5 & -\lambda \end{vmatrix} - 1/2 \begin{vmatrix} 4/5 & 13/12 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \left[(-\lambda + \lambda^2) + 13/20 \right] - 1/2 \left[-4/5\, \lambda \right]$$

$$= \lambda^2 - \lambda^3 - \frac{13}{20}\lambda + \frac{2}{5}\lambda = -\lambda^3 + \lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda$$

$$\lambda \in \left\{ \frac{1}{2}, 0 \right\}$$

COMO $\frac{1}{2} < 1$ y $0 < 1$ ENTONCES EL MÉTODO CONVERGE

NOTA

6

c) PARA VER ESTO, ESCRIBO $A = D - L - U$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -4/5 & 0 & -13/12 \\ 0 & 3/5 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & -3/5 & 0 \end{pmatrix}}_{L} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 13/12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$$

OBSERVO COMO QUEDARÍAN LAS MATRICES T DE JACOBI Y GAUSS-SEIDEL:

$$T_{JACOBI} = D^{-1}(L+U).$$

$$T_{GAUSS-SEIDEL} = (D-L)^{-1}U$$

EL PROBLEMA ES QUE D NO ES UNA MATRIZ INVERSIBLE, POR LO TANTO NO ES POSIBLE APLICAR EL MÉTODO DE JACOBI.

VEO QUE SUCEDE CON $D-L$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & -3/5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 1 \end{pmatrix}$$

$D-L$ TAMPOCO ES UNA MATRIZ INVERSIBLE, YA QUE $\operatorname{rango}(D-L) = 2$. ASÍ QUE TAMPOCO PUEDE APLICARSE EL MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL.

$\therefore$ NO PUEDEN APLICARSE YA QUE D Y $D-L$ NO SON INVERSIBLES.

HOJA Nº 7

FECHA

d) SI PERMUTAMOS LAS FILAS 2 y 3 DE A NOS QUEDA:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 3/5 & 1 \\ -4/5 & 0 & -13/12 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{12} \end{pmatrix}}_{D} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4/5 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{L} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$$

PRIMERO VEAMOS QUE EL MÉTODO DE JACOBI CONVERGE:

$$T_{JACOBI} = D^{-1}(L+U)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{3} \\ \frac{-48}{65} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ✓

TIENE QUE CUMPLIRSE QUE $\rho(T_{JACOBI}) < 1$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1/2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 5/3 \\ \frac{48}{65} & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ \frac{48}{65} & \lambda \end{vmatrix} + \frac{5}{3} \begin{vmatrix} \lambda & -1/2 \\ \frac{48}{65} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\left[\lambda^2\right] + \frac{5}{3}\left[\frac{24}{65}\right] = -\lambda^3 + \frac{8}{13} \rightsquigarrow \lambda^3 = \frac{8}{13}$$

$$\lambda = \sqrt[3]{\frac{8}{13}}$$

$$\lambda \sim 0,85$$ ✓

COMO $0,85 < 1 \Rightarrow$ EL MÉTODO DE JACOBI CONVERGE

NOTA

8

$T_{\text{GAUSS-SEIDEL}} = (D-L)^{-1} U$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 \\ -4/5 & 0 & -\frac{13}{12} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 0 \\ -\frac{48}{65} & 0 & -\frac{12}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -5/3 \\ 0 & -\frac{24}{65} & 0 \end{pmatrix}$$ ✓

VEO LA INVERCA DE $(D-L)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & -\frac{13}{12} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{5}{3} f_2]{f_3 + \frac{4}{5} f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{12} & \frac{4}{5} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{12}{13} f_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{48}{65} & 0 & -\frac{12}{13} \end{array}\right)$$

AHORA PARA VER QUE CONVERGE T_{GS} QUQ $\rho(T_{GS}) < 1$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\lambda & 5/3 \\ 0 & \frac{24}{65} & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 5/3 \\ \frac{24}{65} & \lambda \end{vmatrix} - \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{vmatrix} 0 & 5/3 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \left[\lambda^2 - \frac{5}{3} \cdot \frac{24}{65} \right] + \frac{1}{2} \cdot 0$$

$$= \lambda^3 - \frac{8}{13}\lambda = \lambda\left(\lambda^2 - \frac{8}{13}\right) \qquad \lambda_i \in \left\{ 0, \frac{2\sqrt{26}}{13}, -\frac{2\sqrt{26}}{13} \right\}$$

$\lambda^2 - \frac{8}{13} = 0$

$\max |\lambda_i| = \frac{2\sqrt{26}}{13} \approx 0{,}78 < 1.$

POR LO TANTO GAUSS SEIDEL CONVERGE. $\qquad \lambda = \pm\sqrt{\frac{8}{13}}$

NOTA

FECHA

EJERCICIO 3.

$C: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$

b) SI TENEMOS A C EXPRESADO COMO

$C: ax^2 + ay^2 + bx + cy = 1$

Y TENEMOS LOS PUNTOS $p = (x_i, y_i)$, n DE ELLOS.

INCÓGNITAS: $a, b, c \Rightarrow x^t = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (x_1^2+y_1^2) & x_1 & y_1 \\ (x_2^2+y_2^2) & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_n^2+y_n^2) & x_n & y_n \end{pmatrix}}_{A \in \mathbb{R}^{n\times 3}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{x \in \mathbb{R}^3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{b \in \mathbb{R}^n}$$

YA QUE $(x_i^2 + y_i^2)a + x_i b + y_i c = 1$

$\Leftrightarrow a x_i^2 + a(y_i^2) + b x_i + c y_i = 1$

POR LO TANTO ES EQUIVALENTE A LA ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA.

a) NO ME SALIÓ :(

NOTA

c) TENGO LOS PUNTOS

$i=1 \Rightarrow (1,0)$

$i=2 \Rightarrow (0,1)$

$i=3 \Rightarrow (1,-1)$

$i=4 \Rightarrow (1,1)$

REESCRIBO LA MATRIZ A:

$$\begin{pmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

COMO CUADRADOS MÍNIMOS SIEMPRE TIENE SOLUCIÓN, QUIERO VER SI TIENE UNA ÚNICA SOLUCIÓN O INFINITAS SOLUCIONES.

PARA QUE LA SOLUCIÓN DE CUADRADOS MÍNIMOS SEA ÚNICA, $NU(A^tA) = NU(A) = \{0\}$, O SEA LAS COLUMNAS DE A TIENEN QUE SER LINEALMENTE INDEPENDIENTES.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \rightarrow \boxed{\alpha_2 = 0} \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \rightarrow \alpha_3 = \alpha_1 \rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0} \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \rightarrow -2\alpha_3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_3 = 0}$$

POR LO TANTO COMO $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ LAS COLUMNAS DE A SON L.I.

$\therefore$ CUADRADOS MÍNIMOS TIENE SOLUCIÓN ÚNICA.

NOTA