Algebra Lineal

Segundo recuperatorio del primer parcial - Primer Cuatrimestre 2007

Nombre y apellido	LU	Carrera	1	2	3	4	5	6

Problema 1: Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz y sea $B \in K^{n\times n}$ la matriz que se obtiene rotando 90 grados (en sentido horario) a la matriz A. Calcular el $\det(B)$ en función del $\det(A)$.

Problema 2: Sean $f_0, \dots, f_n \in K[x]$ polinomios de grado menor que n y sean $a_0, \dots, a_n \in K$. Probar que

$$\det \begin{bmatrix} f_0(a_0) & \cdots & f_n(a_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_0(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{bmatrix} = 0.$$

Problema 3: Sean $A, B \in K^{n\times n}$ tales que $A + B = I$ y $\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) = n$. Probar que A y B son proyectores.

Problema 4: Sea $A \in \mathbb{F}_2^{n\times n}$ la matriz que tiene $\bar{0}$ en la diagonal y $\bar{1}$ en todos los demás lugares. Calcular $\mathrm{rg}(A)$.

Problema 5: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que A es un proyector si y solo si $2A - I$ es idempotente (es decir, es inversa de si misma).

Problema 6: Sean $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$, $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$ y $\mathbf{W}_3$ espacios vectoriales. Supongamos que tenemos el siguiente diagrama de transformaciones lineales:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V}_1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f_1"] & \mathbf{V}_2 \arrow[r, "b"] \arrow[d, "f_2"] & \mathbf{V}_3 \arrow[d, "f_3"] \\ \mathbf{W}_1 \arrow[r, "c"] & \mathbf{W}_2 \arrow[r, "d"] & \mathbf{W}_3 \end{tikzcd}$$

donde a y c son monomorfismos, b y d son epimorfismos, $\mathrm{Ker}(b) = \mathrm{Im}(a)$, $\mathrm{Ker}(d) = \mathrm{Im}(c)$, $f_2 \circ a = c \circ f_1$ y $f_3 \circ b = d \circ f_2$. Probar que si f_1 y f_3 son monomorfismos (resp. epimorfismos), entonces f_2 también es monomorfismo (resp. epimorfismo).