Final de Álgebra

22/12/2021

Ejercicio 1

Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y sea $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones f de A en A. Se define la relación siguiente en $\mathcal{F}$:

$$f \ \mathcal{R} \ g \iff f(2) \leq g(2).$$

(a) Estudiar si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.

(b) Sea $f \in \mathcal{F}$ la función definida por $f(m) = r_8(7m)$ para $m \in A$. Calcular la cantidad de funciones $g \in \mathcal{F}$ que satisfacen que $f \ \mathcal{R} \ g$, y también la cantidad de funciones **inyectivas** $h \in \mathcal{F}$ que satisfacen que $f \ \mathcal{R} \ h$.

(a)

- ¿$\mathcal{R}$ es Reflexiva?

  Para que esto suceda, tenemos que verificar que $\forall f \in \mathcal{F}$, sucede que $f \ \mathcal{R} \ f$
  $f \ \mathcal{R} \ f \iff f(2) \leq f(2)$
  $f(2) = f(2) \implies f(2) \leq f(2)$, por tanto $\mathcal{R}$ es una relación **Reflexiva**.

- ¿$\mathcal{R}$ es Simétrica?

  Para que esto suceda, se tiene que cumplir que $\forall f, g \in \mathcal{F} / f \ \mathcal{R} \ g \implies g \ \mathcal{R} \ f$
  Sabemos por hipótesis que $f(2) \leq g(2)$, entonces suponiendo funciones $f, g \ / f(2) < g(2)$ obtendremos que $g(2) \not\leq f(2)$ y por tanto como $g \ \not\mathcal{R} \ f$, $\mathcal{R}$ no es una relación **Simétrica**.

- ¿$\mathcal{R}$ es Antisimétrica?

  Para que $\mathcal{R}$ sea Antisimétrica, tendríamos que verificar que $\forall f, g \in \mathcal{F} / \ (f \ \mathcal{R} \ g) \wedge (g \ \mathcal{R} \ f) \implies g = f$.
  Supongamos $f(n) = n$ y $g(n) = 2$, en este caso, $f(2) \leq g(2) \wedge g(2) \leq f(2)$ ya que $2 \leq 2$, pero al ser funciones diferentes por hipótesis, la relación $\mathcal{R}$ no es **Antisimétrica**.

- ¿$\mathcal{R}$ es Transitiva?

  Por definición, $\mathcal{R}$ será transitiva si $\forall f, g, h \in \mathcal{F} / \ (f \ \mathcal{R} \ g) \wedge (g \ \mathcal{R} \ h) \implies (f \ \mathcal{R} \ h)$.
  Por hipótesis, sabemos que $f(2) \leq g(2) \wedge g(2) \leq h(2)$, que es lo mismo que decir $f(2) \leq g(2) \leq h(2)$ y por tanto, al suceder que $f(2) \leq h(2)$, $f \ \mathcal{R} \ h$ y la relación $\mathcal{R}$ es **Transitiva**.

(b)

$f(m) = r_8(7m) \equiv f(\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}) \longrightarrow \{0, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$, donde cada posición del dominio está asociada a la misma posición de la imagen, por ejemplo, $f(5) = 3$.
Sabemos entonces que $f(2) = 6$ por lo que para hallar la cantidad de funciones $g \in \mathcal{F} / \ f \ \mathcal{R} \ g$ necesitaremos que $6 \leq g(2)$, entonces $g(2) \in \{6, 7\}$, y todos los demás valores del dominio de g pueden ir a cualquier valor de la imagen:

- $g(2)$ tiene 2 opciones
- $g(\{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7\})$ tiene 8 opciones por elemento.

$$\#g = 2 * 7^8$$

Por otro lado, para hallar la cantidad de funciones inyectivas $h \in \mathcal{F} / \ f \ \mathcal{R} \ h$, debemos pedir la condición de que $6 \leq h(2)$ y además la definición de inyectividad:

$$(\forall y \in A) \ (\exists x \in A) \ / \ h(x) = y$$

Como el valor del dominio 2 tendrá dos únicamente dos opciones de la imagen (6 ó 7), cualquiera de los 7 valores restantes del dominio tendrán 7 opciones, luego el próximo tendrá 6 opciones y así sucesivamente:

$h(2) \in \{6, 7\}$ (2 opciones)
$h(0) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - h(2)$ (7 opciones)
$h(1) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - h(2) - h(0)$ (6 opciones)
$h(3) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - h(2) - h(0) - h(1)$ (4 opciones)
...
h(7) $\in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - h(2) - h(0) - h(1) - h(3) - h(4) - h(5) - h(6)$ (1 opción)

$$\#h = 2 * 7!$$

Ejercicio 2

Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \equiv 2 \pmod{28}$. Clasificar los valores que toma

$$(3a + 196^n : 2a - 196^n)$$

según los distintos valores de a, descritos en la forma $a \equiv r \pmod{m}$ para $r, m \in \mathbb{N}$ adecuados, y de $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} & d \mid 3a + 196^n \\ & d \mid 2a - 196^n \\ & d \mid 3a + 196^n + (2a - 196^n) \\ & d \mid 5a \end{aligned}$$

$$d \in div^+(5a) = \{1, 5, div^+(a), 5a\}$$

¿Qué tiene que pasar para que $5 \mid d$?

$$\begin{aligned} 3a + 196^n \equiv 0 \pmod{5} &\iff \\ 3a + 1^n \equiv 0 \pmod{5} &\iff \\ 3a \equiv 4 \pmod{5} &\iff \\ 6a \equiv 8 \pmod{5} &\iff \\ a \equiv 3 \pmod{5} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a - 196^n \equiv 0 \pmod{5} &\iff \\ 2a - 1^n \equiv 0 \pmod{5} &\iff \\ 2a \equiv 1 \pmod{5} &\iff \\ -4a \equiv -2 \pmod{5} &\iff \\ a \equiv 3 \pmod{5} & \end{aligned}$$

$$5 \mid d \iff a \equiv 3 \pmod{5}$$

Pero sabemos que $a \equiv 2 \pmod{28}$, por ende podemos describir la congruencia de a con respecto a 5 de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a \equiv 2 \pmod{28} \\ a \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

$(5:28)=1$, Tiene una única solución $\pmod{28*5}$

$$a \equiv 2 \pmod{28} \iff a = 28k+2$$
$$a \equiv 3 \pmod{5}$$
$$28k+2 \equiv 3 \pmod{5}$$
$$3k \equiv 1 \pmod{5}$$
$$6k \equiv 2 \pmod{5}$$
$$k \equiv 2 \pmod{5}$$

$$a = 28k+2$$
$$k = 5m+2$$
$$a = 28(5m+2)+2$$
$$a = 140m+56+2$$
$$a = 140m+58 \iff a \equiv 58 \pmod{140}$$

$$5 \mid (3a+196^n : 2a-196^n) \iff a \equiv 58 \pmod{140}$$

Sabemos que si se cumple esa condición, 5 será parte del mcd.
¿Qué otros números pueden formar parte del mcd?
Como 196^n se factoriza como $7^2.2^2$, los términos del mcd pueden incluir a 7, 2, 7^2 y 2^2 si a tiene entre sus múltiplos a estos factores.

$$a \equiv 2 \pmod{28} \iff$$
$$\begin{cases} a \equiv 2 \pmod{7} \\ a \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

Debido a las hipótesis dadas del enunciado, a nunca puede ser múltiplo de 7 (en consecuencia, tampoco de 7^2) ni de 4, pero lo es de 2:

$$a \equiv 2 \pmod{4} \implies a \equiv 0 \pmod{2}$$

Al ser a siempre múltiplo de 2, sabemos que tanto $3a+196^n$ como $2a-196^n$ son divisibles por 2 $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$3a+196^n \equiv a+0^n \equiv a \pmod{2}$$
$$28k+2 \equiv 0k+0 \equiv 0 \pmod{2}$$

$$2a-196^n \equiv 0a-0^n \equiv 0 \pmod{2}$$

Entonces además sabemos que $2 \mid (3a+196^n : 2a-196^n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall a \in \mathbb{Z}$ / $a \equiv 2 \pmod{28}$

Los valores que toma $(3a+196^n : 2a-196^n)$ son:

$$10 \iff a \equiv 58 \pmod{140}$$
$$2 \iff a \not\equiv 58 \pmod{140}$$

Ejercicio 3

Sea $\omega = e^{\frac{\pi}{3}i}$, y sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por:

$$z_1 = \omega - 1 \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{z_n}^{3n+8}\ , \ \ \forall n \geq 1.$$

Calcular z_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Empecemos calculando $z_1 = \omega - 1$:

$$\begin{aligned} e^{\frac{\pi}{3}i} - 1 &= \\ (\cos(\tfrac{\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{\pi}{3})) - 1 &= \\ \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i - 1 &= \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 1 & = (-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 \\ -\frac{1}{2} & = 1\cos\theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & = 1\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \cos^{-1}(-\tfrac{1}{2}) &= \theta \\ \tfrac{2\pi}{3} &= \theta \end{aligned}$$

$$e^{\frac{\pi}{3}i} - 1 = e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

Calculemos algunos valores de z_n:

$$\begin{aligned} z_2 &= \overline{z_2}^{3*1+8} \\ &= \overline{(e^{\frac{2\pi}{3}i})}^{11} \\ &= (e^{\frac{4\pi}{3}i})^{11} \\ &= e^{\frac{44\pi}{3}i\ -2k\pi} \\ &= e^{\frac{2\pi}{3}i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= \overline{z_2}^{3*2+8} \\ &= \overline{(e^{\frac{2\pi}{3}i})}^{14} \\ &= (e^{\frac{4\pi}{3}i})^{14} \\ &= e^{\frac{56\pi}{3}i\ -2k\pi} \\ &= e^{\frac{2\pi}{3}i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_4 &= \overline{z_3}^{3*3+8} \\ &= \overline{(e^{\frac{2\pi}{3}i})}^{17} \\ &= (e^{\frac{4\pi}{3}i})^{17} \\ &= e^{\frac{68\pi}{3}i\ -2k\pi} \\ &= e^{\frac{2\pi}{3}i} \end{aligned}$$

Pareciera suceder que el término general de la sucesión $z_n = e^{\frac{2\pi}{3}i}$.
Pruebo por inducción:

- Caso base:
  $P(1) \equiv z_1 = \omega - 1 = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ ya fue verificado al comienzo.

- Paso inductivo:
  Hipótesis Inductiva $\equiv z_k = e^{\frac{2\pi}{3}i}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ / $1 \leq k < h+1$

  Quiero probar que $P(h) \implies P(h+1) \iff z_h = e^{\frac{2\pi}{3}i} \implies z_{h+1} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$
  Sabemos por enunciado que $z_{h+1} = \overline{z_h}^{3h+8}$:

$$\begin{aligned}
\overline{z_h}^{3h+8} &= \qquad \text{(xHI)} \\
\overline{e^{\frac{2\pi}{3}i}}^{3h+8} &= \\
(e^{\frac{4\pi}{3}i})^{3h+8} &= \\
e^{(\frac{4}{3}*3h+\frac{4}{3}*8)\pi i} &= \\
e^{(\frac{12h+32}{3})\pi i} &=
\end{aligned}$$

Por propiedad, cualquier número complejo expresado en la forma $re^{\theta i}$ será igual a otro tal que su argumento difiera en $2k\pi$:

$$re^{\theta i} = re^{\theta i - 2k\pi} \ , \forall k \in \mathbb{Z}$$

Por lo que podemos reducir el argumento de z_{n+1} ($\frac{12h+32}{3}\pi$) por su equivalente entre [0 y 2π), recordando que $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\tfrac{12n+32}{3}\pi &= \\
\tfrac{12n+32}{3}\pi - \tfrac{6}{3}k\pi &= \qquad \text{(con } k \in \mathbb{Z}) \\
\tfrac{12n+32-6k}{3}\pi &
\end{aligned}$$

Como quiero obtener argumento entre [0 y 2π), El numerador de la fracción deberá estar entre [0 y 6), por lo que puedo tomar congruencia módulo 6 para obtener los valores del argumento respecto de n:

$$12n + 32 \equiv 0n + 2 \equiv 2 \pmod 6 \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

Obtenemos por esta ecuación de congruencia que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\frac{12n+32}{3}\pi \equiv \frac{2}{3}\pi$, por lo tanto:

$$z_{n+1} = e^{\frac{2\pi}{3}i} \ , \quad \text{como se quería probar } (z_n = z_{n+1}).$$

Ejercicio 4

(a) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ **coprimos** y no nulos para los cuales el polinomio

$$X^4 + iX^3 + 2X^2 + aiX + b$$

tiene al menos una raíz **racional**.

(b) Para cada par de valores hallado, factorizar el polinomio obtenido en $\mathbb{C}[X]$.

(a)

Buscamos valores para a, b tales que el polinomio dado, tenga alguna raíz racional de la forma $\frac{c}{d}$. Al evaluar esta raíz, los términos con coeficientes imaginarios se tendrán que cancelar entre sí, y los restantes términos por ende también:

$$\begin{cases} X^4 + 2X^2 + b = 0 \\ iX^3 + aiX = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
iX^3 + aiX = 0 &\iff \\
iX(X^2 + a) = 0 &\iff \\
(X = 0) \vee (X^2 = -a) &
\end{aligned}$$

En el caso en que $X = 0$, el polinomio evaluado en 0 generará que b tenga que ser 0 para que sea raíz y esto no se permite por enunciado (a, b no nulos), por lo que la condición restante es que $X^2 = -a$, es decir, a tiene que ser el negativo de un cuadrado perfecto (-1,-4,-9,-16, etc.) ya que de otro modo X no será raíz racional.

$$X^2 = -a \iff X = \pm\sqrt{-a} \quad \text{(recordando que } a \text{ es un cuadrado negativo)}$$

Con esta nueva condición, reemplazo en la primer ecuación (al ser potencias pares, es análogo usar $\sqrt{-a}$ ó $-\sqrt{-a}$):

$$\begin{aligned}
X^4 + 2X^2 + b = 0 &\iff \\
(\sqrt{-a})^4 + 2(\sqrt{-a})^2 + b = 0 &\iff \\
(-a)^2 + 2(-a) + b = 0 &\iff \\
a^2 - 2a + b = 0 &\iff \\
a(a-2) = -b &
\end{aligned}$$

Lo que sucede en esta ecuación es que tenemos una relación entre a y b, por ejemplo, para $a = -4$, el valor de b será -24. El inconveniente es que la ecuación describe que a siempre será factor de b por lo que no se cumplirá la condición $a \perp b$, salvo para $a = -1$ donde el valor b es igual a -3.

El par $a, b = (-1, -3)$ es el único par existente con las condiciones dadas (a es un cuadrado perfecto negativo y $-b = a(a-2)$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos).

(b)

$$f(X) = X^4 + iX3 + 2X2 - iX - 3$$

Para factorizar este polinomio, recordamos la ecuación que teníamos: $X^2 - a = 0$, donde las dos raíces de esta ecuación serían $\pm(\sqrt{-a})$, por lo que con $a = -1$ obtenemos que:

$$X_0 = 1$$
$$X_1 = -1$$

Realizamos la división entre $f(x)$ y $X^2 - 1$ para obtener las raíces restantes:

$$\begin{array}{l|l}
X^4 + iX^3 + 2X^2 - iX - 3 & \underline{X^2 - 1} \\
 & X^2 + iX + 3
\end{array}$$

Para obtener las últimas dos raíces, buscamos las soluciones del polinomio $X^2 + iX + 3$.

$$X_{2,3} = \frac{-b \pm \omega^2}{2a} = \frac{-i \pm \omega^2}{2}$$

$$\omega^2 = b^2 - 4ac = (-i)^2 - 4 * 1 * 3 = -13$$
$$\omega = i\sqrt{13}$$

$$X_2 = \frac{-i + i\sqrt{13}}{2} = i\frac{\sqrt{13} - 1}{2}$$

$$X_3 = \frac{-i - i\sqrt{13}}{2} = -i\frac{\sqrt{13} + 1}{2}$$

La factorización de $f(X)$ en $\mathbb{C}[X]$ en términos irreducibles es la siguiente:

$$\boxed{f(X) = (X-1)(X+1)(X - \tfrac{\sqrt{13}-1}{2}i)(X + \tfrac{\sqrt{13}+1}{2}i)}$$

Por alguna corrección o error que haya tenido: 11 6285-6924