Parcial de lógica

Lógica y computabilidad

Segundo cuatrimestre de 2015

El examen es a libro abierto y se puede suponer demostrado lo dado en las clases y los ejercicios de las guías colocando referencias claras. Entregar cada ejercicio en hojas separadas. En cada hoja debe figurar nombre, apellido y número de orden. El examen consta de 4 ejercicios de igual valor. Cada ejercicio será calificado con A (aprobado), R (regular) o I (insuficiente), ocasionalmente con un signo - (menos). Para aprobar un parcial es necesario tener al menos dos ejercicios calificados con A o A-. Para promocionar es necesario tener al menos tres ejercicios calificados con A o A- en ambos parciales o sus correspondientes recuperatorios.

Ejercicio 1. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta.

a. Sean $\Gamma, \Delta \subset \mathbf{Form}$ dos conjuntos de fórmulas de la lógica proposicional, $\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma)$, $\beta \in \mathbf{Con}(\Delta)$ tales que existe una valuación v tal que $v \not\models \alpha$ y $v \not\models \beta$. Entonces existe una fórmula en $\mathbf{Con}(\Gamma) \cap \mathbf{Con}(\Delta)$ que no es una tautología.

b. El conjunto de conectivos $\{\rightarrow, \top, \vee\}$ es adecuado.

Ejercicio 2. Sea $\Gamma \subset \mathbf{Form}$ un conjunto insatisfacible de fórmulas de la lógica proposicional. Demostrar que existen $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \Gamma$ tales que $\forall\ \alpha \in \mathbf{Form}$, $\bigvee_{i=1}^{k}(\alpha_i \rightarrow \alpha)$ es una tautología.

Ejercicio 3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta dando una demostración o un contraejemplo.

a. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, $\Gamma \subset \mathbf{Form}(\mathcal{L})$, $\varphi, \psi \in \mathbf{Form}(\mathcal{L})$. Entonces $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$ sii $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$.

b. Sea $\mathcal{M} = \langle \mathbb{R}, =, +, \cdot, 0, 1\rangle$. La relación unaria $P = \{x \mid x \text{ es positivo}\}$ es expresable en $\mathcal{M}$.

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{L} = \{=, \mathbf{tet}, \mathbf{div}, \mathbf{1}\}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, un símbolo de relación unario $\mathbf{tet}$, un símbolo de relación binario $\mathbf{div}$ y un símbolo de constante $\mathbf{1}$. Decimos que un número natural es *tétrico* si tiene exactamente cuatro divisores positivos. Por ejemplo, el 10 es tétrico pero el 7 no. Sea $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}_{>0}, =, \mathbf{tet}^{\mathcal{N}}, \mathbf{div}^{\mathcal{N}}, \mathbf{1}^{\mathcal{N}}\rangle$ la estructura cuyo universo son los números enteros positivos, $\mathbf{1}^{\mathcal{N}} = 1 \in \mathbb{N}$, $\mathbf{div}^{\mathcal{N}}$ es la relación de divisibilidad y $\mathbf{tet}^{\mathcal{N}} = \{x \mid x \text{ es tétrico}\}$. Consideramos la siguiente axiomatización $SQ_{\mathcal{N}}$ que extiende a SQ con los siguientes infinitos axiomas:

T1 $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ x\mathbf{div}y \wedge y\mathbf{div}z \rightarrow x\mathbf{div}z$

T2 $(\forall x)(\forall y)\ x\mathbf{div}y \wedge y\mathbf{div}x \rightarrow x = y$

T3 $(\forall x)\ x\mathbf{div}x \wedge \mathbf{1div}x$

T4 $(\forall x)\ \mathbf{tet}(x) \leftrightarrow (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4) \bigwedge_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{4} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{4} x_i\mathbf{div}x \wedge \left((\forall x_5)x_5\mathbf{div}x \rightarrow \bigvee_{i=1}^{4} x_5 = x_i\right)$

T5n $(\exists x_1)...(\exists x_n) \bigwedge_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} x_i \neq x_j$ para todo $n \geq 1$

a. Describir en el lenguaje coloquial las propiedades descriptas por los axiomas $\mathbf{T1}, \mathbf{T2}, \mathbf{T3}$, $\mathbf{T4}$ y $\mathbf{T5_n}$ y concluir que $SQ_{\mathcal{N}}$ es correcta con respecto a $\mathcal{N}$.

b. Demostrar que $SQ_{\mathcal{N}}$ no es completa con respecto a $\mathcal{N}$.

Nota: Cuando se quiera utilizar que un modelo satisface (o no) cierta fórmula, no es necesario hacer la demostración formal siempre que se explique con palabras por qué esto es cierto.