Parcial de lógica

Lógica y computabilidad

Segundo cuatrimestre de 2017

El examen es a libro abierto y se puede suponer demostrado lo dado en las clases y los ejercicios de las guías colocando referencias claras. Entregar cada ejercicio en hojas separadas. En cada hoja debe figurar nombre, apellido y número de orden.

Ejercicio 1. Decidir entre verdadero y falso. Justificar.

a) Para toda fórmula φ de la lógica proposicional, existe $\psi \neq \varphi$ tal que $\mathbf{Con}\{\varphi\} = \mathbf{Con}\{\varphi, \psi\}$.

b) Dada β una fórmula de la lógica proposicional, definimos $\psi_\beta = \neg((p_1 \to (p_2 \wedge p_3)) \wedge (\beta \to p_3))$. Es posible elegir β tal que ψ_β sea una tautología.

c) Sean φ, ψ dos fórmulas de la lógica proposicional. Sea $V_1 = \mathbf{Var}(\varphi)$ y $V_2 = \mathbf{Var}(\psi)$. Si $V_1 \subsetneq V_2$ entonces $\#\{v : V_2 \to \{0,1\} \mid v \models \varphi\} \leq \#\{v : V_2 \to \{0,1\} \mid v \models \psi\}$.

Aclaración: $v \models \rho$ significa que la valuación extendida a **Prop** *mandando las otras variables proposicionales a 0 satisface ρ).*

Ejercicio 2. Sea $\Gamma \subseteq \mathbf{Form}$ un conjunto consistente de fórmulas de la lógica proposicional, y sea Δ un subconjunto finito de $\mathbf{Con}(\Gamma)$. Decidir verdadero o falso. Justificar.

a. Existe un subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\Delta \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_0)$.

b. Existe un subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\Delta = \mathbf{Con}(\Gamma_0)$.

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{L} = \langle f, <, = \rangle$ un lenguaje de primer orden con igualdad donde f es un símbolo de función binaria y $<$ es un símbolo de predicado binario. Sea $\mathcal{M}$ la $\mathcal{L}$-estructura con universo $M = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{N}\} \cup \{(x,1) \mid x \in \mathbb{N}\}$, $(x,a) <_\mathcal{M} (y,b)$ si $(a = b$ y $x < y)$ o $(a = 0$ y $b = 1)$, y

$$f_\mathcal{M}((x,a),(y,b)) = \begin{cases} (x+y, a) & \text{si } a = b \\ (0,0) & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

Demostrar que todos los elementos de $\mathcal{M}$ son distinguibles.

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{L} = \{f, <\}$ un lenguaje de primer orden con igualdad con un símbolo de función unario f y un símbolo de relación binario $<$. Dada una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M} = \langle M, f_\mathcal{M}, <_\mathcal{M} \rangle$, demostrar que no se puede expresar con una sentencia de $\mathbf{Form}(\mathcal{L})$ la siguiente propiedad: Existe $e \in M$ tal que $\{x \in M \mid f_\mathcal{M}(x) <_\mathcal{M} e\}$ es un conjunto infinito.