Parcial de Lógica

Lógica y Computabilidad

9 de marzo de 2009

Este examen se aprueba obteniendo al menos **6 puntos**. El parcial es a libro abierto y se puede suponer demostrado todo lo que se dio en clase, colocando referencias claras. En el caso de usar resultados de las guías de ejercicios, se deben incluir las demostraciones.

Ejercicio 1. (**3 puntos**)

a) (**1 punto**) Sea V una valuación, y p, q dos proposiciones tales que $V(p) = V(q)$. Notamos $\varphi[p/q]$ a la fórmula que resulta de reemplazar uniformemente la proposición p por q en φ. Demostrar que $V(\varphi) = V(\varphi[p/q])$ para toda fórmula φ de la lógica proposicional.

b) (**2 puntos**) Dado un conjunto C de fórmulas de la lógica proposicional, definimos $C[p/q] = \{\varphi[p/q] \mid \varphi \in C\}$. Suponiendo que C es un conjunto maximal satisfacible, demostrar que $C[p/q]$ es satisfacible sii $p \leftrightarrow q \in C$.

Ejercicio 2. (**3 puntos**) Vamos a decir que una relación binaria R tiene la propiedad de *confluencia* si para todo elemento w en su dominio sucede que si $R(w, v)$, $R(w, v')$ y $v \neq v'$, entonces existe un elemento e y dos caminos $C_R(v, e)$ y $C_R(v', e)$ de longitud finita. Como es usual, decimos que hay un camino $C_R(a, b)$ cuando vale $R(v_0, v_1), R(v_1, v_2), \ldots, R(v_{n-1}, v_n)$ para algún $n \in \mathbb{N}$, donde $v_0 = a$ y $v_n = b$.

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad con un símbolo de predicado binario P. Mostrar que la proposición "P tiene la propiedad de confluencia" no es expresable en $\mathcal{L}$.

Ejercicio 3. (3 puntos) Vamos a llamar $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}; 0; *_2 \rangle$ al modelo usual de los números naturales con cero y la función que multiplica un natural por 2. Considerar un lenguaje de primer orden con igualdad $\mathcal{L}$ con un símbolo de constante 0 y un símbolo unario de función $*_2$. Sea la siguiente axiomatización SQ_N, que extiende a SQ con los axiomas:

S1 $\quad (\forall x)(*_2(x) = x \leftrightarrow x = 0)$

S2 $\quad (\forall x)(\forall y)(x \neq y \rightarrow *_2(x) \neq *_2(y))$

a) **(1 punto)** Demostrar que $S2$ es verdadero en $\mathcal{N}$.

b) **(2 puntos)** Demostrar que SQ_N no es completa con respecto a $\mathcal{N}$. Esto significa encontrar una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}$ y un modelo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{N} \models \varphi$, $\mathcal{M} \models SQ_N$, pero $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

Ejercicio 4. (**1 punto**) Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa y justificar:

Si $\Gamma_1, \ldots \Gamma_k$, son conjuntos r.e. de sentencias de primer orden, entonces el conjunto $\{\varphi \mid \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i \models \varphi\}$ también es r.e.