Recuperatorio de Lógica

Lógica y Computabilidad

14 de marzo de 2009

Este examen se aprueba obteniendo al menos **6 puntos**. El parcial es a libro abierto y se puede suponer demostrado todo lo que se dio en clase, colocando referencias claras. En el caso de usar resultados de las guías de ejercicios, se deben incluir las demostraciones. **Importante:** en el ejercicio 1, pueden asumirse los resultados de los items anteriores.

Ejercicio 1. Definimos el lenguaje de la *lógica de grosso orden* (GOL) como:

$$\mathrm{FORM}(\mathcal{L}) := P(t_1, \dots t_n) \mid \neg\varphi \mid (\varphi \to \psi) \mid \between_x(\varphi, \psi)$$

donde P es un símbolo de relación n-ario de $\mathcal{L}$, $t_1, \dots t_n$ son $\mathcal{L}$-términos, x es una variable y $\varphi, \psi \in \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$. Su semántica está dada por:

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{A} \models_G P(t_1, \dots t_n)[v] & \text{sii} & (\tilde{v}(t_1), \dots \tilde{v}(t_n)) \in P_{\mathcal{A}} \\
\mathcal{A} \models_G \neg\varphi[v] & \text{sii} & \mathcal{A} \not\models_G \varphi[v] \\
\mathcal{A} \models_G (\varphi \to \psi)[v] & \text{sii} & \mathcal{A} \not\models_G \varphi[v] \text{ ó } \mathcal{A} \models_G \psi[v] \\
\mathcal{A} \models_G \between_x(\varphi, \psi)[v] & \text{sii} & \text{existe una biyección entre } \{a \mid \mathcal{A} \models_G \varphi[v(x=a)]\} \\
 & & \text{ y } \{b \mid \mathcal{A} \models_G \psi[v(x=b)]\}
\end{array}$$

donde $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{L}$-estructura y v una valuación.

a) (**2 p.**) Para ver que GOL es al menos tan expresiva como la lógica de primer orden, considerar la siguiente traducción:

$$\begin{array}{ll}
T\left(P\left(t_1, \dots t_n\right)\right) & := P(t_1, \dots t_n) \\
T\left(\neg\varphi\right) & := \neg T(\varphi) \\
T\left(\varphi \to \psi\right) & := (T(\varphi) \to T(\psi)) \\
T\left((\forall x)\varphi\right) & := \between_x(x \neq x, \neg\varphi)
\end{array}$$

y demostrar que $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ sii $\mathcal{A} \models T(\varphi)[v]$.

b) (**1,5 p.**) Sabemos que un conjunto es infinito sii admite una biyección con un subconjunto propio (e.g. existe una biyección entre los naturales y los pares). Utilizando este hecho, dar una sentencia φ de GOL que caracterice modelos infinitos (i.e. $\mathcal{A} \models_G \varphi$ sii A es infinito). ¿Puede ser GOL igual de expresiva que primer orden?

c) (**2,5 p.**) Demostrar que GOL no es *compacta* (i.e. que no tiene la propiedad de compacidad). *Sugerencia:* Utilice el ejercicio anterior.

d) (**1 p.**) ¿Puede haber una axiomatización de GOL que sea correcta y fuertemente completa? Justificar.

Ejercicio 2. (**2 p.**) Mostrar que para toda valuación proposicional v el conjunto $\Gamma_v = \{\alpha \mid v(\alpha) = 1\}$ es maximal consistente.

Ejercicio 3. (**1 punto**)
Decidir si la siguiente afirmación es verdadera ó falsa y justificar:

Si Γ_1 y Γ_2 son consistentes, entonces o bien a partir de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ se demuestra una contradicción o bien existe Γ_3 maximal consistente tal que $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_3$ y $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_3$.