Parcial de Lógica

Lógica y Computabilidad

10 de Marzo, 2008

Este examen se aprueba obteniendo al menos **60 puntos**. El parcial es a libro abierto y se puede suponer demostrado todo lo que se dio en clase, colocando referencias claras. En el caso de usar resultados de las guías de ejercicios, se deben incluir las demostraciones.

Ejercicio 1. (**25 p**) Dadas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, fórmulas de la lógica proposicional, el operador ternario $min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, llamado *operador de minoría*, devuelve la valuación que concuerda con la minoría de evaluar las 3 fórmulas. Formalmente, dada una valuación $v \in \mathbf{Val}$,

$$v(min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists i, j,\ 1 \leq i < j \leq 3 \text{ tal que } v(\alpha_i) = v(\alpha_j) = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostrar que el conjunto $\{min\}$ no es adecuado. Sugerencia: dada una valuación v, analizar qué sucede con la valuación $\bar{v}$, definida como $\bar{v}(p) = 1 - v(p)$.

Ejercicio 2. (**35 p**) Un número r es llamado *infinitesimal* si es mayor que cero y menor que todos los reales positivos. Claramente, en el modelo estándar de los reales (notación: $\mathcal{R}$) no hay números infinitesimales. Sea $SQ_{\mathbb{R}}$ una axiomatización de primer orden correcta con respecto a $\mathcal{R}$ sobre el lenguaje $S = \{0, suc, <, +, -, *, /\}$, que extiende a SQ con nuevos axiomas. Sea $SQ^+_{\mathbb{R}}$ una extensión de $SQ_{\mathbb{R}}$ en donde se agrega un nuevo símbolo de constante c y los siguientes (infinitos) axiomas:

$$\begin{array}{lll} \textbf{Positivo} & c > 0 & \\ \textbf{Menor}_n & c < \frac{1}{suc^{(n)}(0)} & \text{para todo } n > 1 \end{array}$$

a) (**5 p**) Demostrar que si $\mathcal{M}$ es modelo de $SQ^+_{\mathbb{R}}$, entonces $\mathcal{M}$ es modelo de $SQ_{\mathbb{R}}$.

b) (**25 p**) Demostrar que $SQ^+_{\mathbb{R}}$ es satisfacible (ayuda: usar compacidad).

c) (**5 p**) Demostrar que cualquier axiomatización correcta con respecto a $\mathcal{R}$ admite un modelo que posee números infinitesimales.

Ejercicio 3. (**40 p**) Sea un lenguaje de primer orden con igualdad, un símbolo de predicado binario $<$, un símbolo de constante 0, y un símbolo de función unaria suc. Sea $\mathcal{N}$ la interpretación usual de los números naturales. Considerar la axiomatización $SQ_{\mathbb{N}}$, que extiende la axiomatización SQ vista en clase con los siguientes axiomas:

$$\begin{array}{ll} \textbf{Cero} & (\forall x)\neg(x < 0) \\ \textbf{Asim} & (\forall x)(\forall y)\big(x < y \to \neg(y < x)\big) \\ \textbf{Tran} & (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((x < y \land y < z) \to x < z\big) \\ \textbf{Suc} & (\forall x)(\forall y)\big((x < y \lor x = y) \to x < suc(y)\big) \end{array}$$

a) (**10 p**) Demostrar que los axiomas **Cero** y **Asim** son válidos en $\mathcal{N}$.

b) (**30 p**) Demostrar que existe un modelo $\mathcal{M}$ y una fórmula φ tal que:

- todos los axiomas de $SQ_{\mathbb{N}}$ son válidos en $\mathcal{M}$, pero $\mathcal{M} \not\models \varphi$ y además
- φ es válida en $\mathcal{N}$.