ALGORITMOS Y ESTRUCTURAS DE DATOS III
1$^{\underline{er}}$ Parcial / 19-MAY-2012

Espacio reservado para los docentes:

Nota (Numérica)	Nota (Letras)	Docente

Completar los siguientes datos antes de entregar:

Nº Orden	Apellido y nombre	L.U.	Cantidad de hojas[1]

Fecha de entrega de notas: 30-MAY-2012.
Por favor entregar esta hoja junto al examen.

1. Dado un grafo con ejes G, se define su grafo de líneas $L(G)$ como el grafo que tiene un vértice por cada eje de G, y tal que dos vértices de $L(G)$ son adyacentes si y sólo si los ejes correspondientes de G tienen un extremo en común. Sea G un grafo con ejes. Demostrar que $K_{1,3}$ no es subgrafo inducido de $L(G)$.

2. Dados dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, un homomorfismo de G_1 a G_2 es una función $f : V_1 \to V_2$ tal que $(v, w) \in E_1 \Rightarrow (f(v), f(w)) \in E_2$. Decimos que G_1 es homomorfo a G_2 si y sólo si existe un homomorfismo de G_1 a G_2.

   Sean G y H dos grafos, y f un homomorfismo de G a H. Sean $S_G = (v_1, v_2, \ldots v_k)$ una secuencia de vértices (no necesariamente distintos) de G, y $S_H = (f(v_1), f(v_2), \ldots f(v_k))$ la secuencia correspondiente de vértices de H.

   (a) ¿Es cierto que si S_G es un camino (no necesariamente simple) en G, entonces S_H es un camino en H? En caso afirmativo, ¿es cierto que si S_G es simple entonces S_H también lo es? Justificar.

   (b) ¿Es cierto que si S_H es un camino (no necesariamente simple) en H, entonces S_G es un camino en G? En caso afirmativo, ¿es cierto que si S_H es simple entonces S_G también lo es? Justificar.

3. Sea $G = (V, E)$ un grafo o digrafo con longitudes no negativas asociadas a sus ejes. Dados $v \in V$ y $W \subseteq V$, definimos la distancia entre v y W como $D(v, W) = \min_{w \in W} d(v, w)$, donde $d(v, w)$ es la longitud de un camino mínimo de v a w. Diseñar un algoritmo eficiente para calcular $D(v, W)$ para cada $v \in V$. Mostrar la correctitud y determinar la complejidad del algoritmo propuesto. Justificar. El mejor algoritmo que conocemos tiene la misma complejidad que el algoritmo de Dijkstra.

4. Una cadena de caracteres correcta (CCC) es una cadena s que cumple una de las siguientes condiciones:

   - es nula (tiene longitud cero);
   - es de la forma "(c)", "[c]" o "{c}", donde "c" es una CCC;
   - es la concatenación de dos CCC, cada una de menor longitud que la de s.

   Por ejemplo, "", "([]{})" y "()[]{}" son CCC, mientras que "][", "((()", "{]" y "(" no lo son. Notar que toda CCC tiene longitud par, y que cualquier cadena de caracteres de longitud par puede transformarse en una CCC modificando algunos de sus caracteres (eventualmente ninguno). Diseñar un algoritmo eficiente que dada una cadena de caracteres de longitud par formada únicamente por los caracteres contenidos en "()[]{}", indique la mínima cantidad de caracteres de la cadena que es necesario modificar a fin de transformarla en una CCC. Por ejemplo, el resultado de aplicar el algoritmo a "", "][" y "((()" debe ser respectivamente 0, 2 y 1. Mostrar la correctitud y determinar la complejidad del algoritmo propuesto. Justificar. El mejor algoritmo que conocemos utiliza la técnica de programación dinámica y tiene complejidad $O(n^3)$, donde n es la longitud de la cadena de caracteres.

5. (a) Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es (estrictamente) creciente en I si y sólo si para todo par $a, b \in I$ se cumple que $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
   Sea G un grafo conexo con pesos asociados a sus ejes, y sea T un subgrafo de G. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo que contiene a todos los pesos, y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función creciente en I. Sea G_f el grafo que se obtiene remplazando en G cada peso p por $f(p)$. Análogamente se define T_f a partir de T. Demostrar que T es un árbol generador mínimo de G si y sólo si T_f es un árbol generador mínimo de G_f.
   SUGERENCIA: Usar que el algoritmo de Kruskal es correcto, y que si f es creciente entonces preserva el orden y tiene inversa, la cual también es creciente.

   (b) Sea G un grafo conexo con pesos positivos asociados a sus ejes. Demostrar que T es un árbol generador mínimo de G si y sólo si la productoria de los pesos de sus ejes es mínima dentro del conjunto de los árboles generadores de G.

[1] incluyendo a esta hoja