0,65

Listo

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)
EXAMEN FINAL
(30/12/03)

NOMBRE Y APELLIDO:
N° DE LIBRETA: N° DE HOJAS ENTREGADAS:
e-mail:

EL EXAMEN FINAL SE APRUEBA CON 50 PUNTOS

ENUNCIAR LAS PROPIEDADES QUE SE UTILIZAN

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

---

1. **(25 puntos)**

   (a) Sea X una variable aleatoria con distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Hallar su función generadora de momentos, su esperanza y su varianza.

   (b) Sean $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ variables aleatorias independientes. Deduzca la distribución de $X + Y$. ¿Es alguna distribución conocida?

2. **(25 puntos)**

   (a) Probar que si F es una función de distribución acumulada continua y estrictamente creciente y $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$, entonces la variable aleatoria $Y = F^{-1}(U)$ tiene a F como función de distribución acumulada.

   (b) Dada la función de densidad:

   $$f(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-x^{\alpha}} \mathcal{I}_{(0,\infty)}(x)$$

   ¿Cómo podría generar una variable aleatoria con esta densidad a partir de una variable aleatoria uniforme? Justifique detalladamente.

3. **(25 puntos)** Sean T_n y W_n dos estimadores insesgados del parámetro θ

   (a) Si estos estimadores se combinan para formar un nuevo estimador dado por

   $$\widehat{\theta}_n = \alpha T_n + \beta W_n$$

   donde α y β son constantes. ¿Qué condiciones deben cumplir α y β para que $\widehat{\theta}_n$ sea insesgado?

   (b) Si T_n y W_n son independientes y tienen varianza $V(T_n)$ y $V(W_n)$, respectivamente, calcular la varianza de $\widehat{\theta}_n$.

(c) Bajo las condiciones de b), ¿cuál es la elección de α y β que minimiza la varianza de $\widehat{\theta}_n$ y que a la vez hace que el estimador sea insesgado?

4. (25 puntos)

   (a) Enuncie el Teorema Central del Límite.

   (b) Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. con distribución $Bi(1,p)$ y n suficientemente grande. Deducir un intervalo de confianza de nivel aproximado $1-\alpha$ para p.

   (c) Se llama *chance* al cociente $g(p) = \dfrac{p}{1-p}$ que mide cuánto más frecuentes son los éxitos que los fracasos.

      i. Probar que si $p > q$, entonces $g(p) > g(q)$. (A mayor probabilidad de éxito, mayor chance).

      ii. Hallar un intervalo de confianza de nivel aproximado $1-\alpha$ para $\theta = \dfrac{p}{1-p}$.

$X_1, \ldots, X_n$ indep $\Rightarrow g(X_1, \ldots, X_k)$ $h(X_k, \ldots, X_{k+m})$ $w(X_{k+m}, \ldots, X_n)$ son indep

U, V indep $\Rightarrow$ U^2 y V^2 son inde

$$\begin{aligned} Var(UV) &= E((UV)^2) - E(UV)^2 \\ &= E(U^2)E(V^2) - E(U)^2\, E(V)^2 \end{aligned}$$