Clase práctica 1 (lógica)
Lógica y Computabilidad

16 de Febrero de 2009

Ejercicio 1. Un conjunto de fórmulas Γ es *independiente* si para todo $\varphi \in \Gamma$ sucede que $\varphi \notin Con(\Gamma \setminus \{\varphi\})$. Sea Γ un conjunto independiente infinito. Probar que para todo Γ_0 finito, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, el conjunto $\{\bigwedge_{\varphi\in\Gamma_0} \varphi\}$ es independiente.

Demostración. $\{\bigwedge_{\varphi\in\Gamma_0} \varphi\}$ es independiente sii $\bigwedge_{\varphi\in\Gamma_0} \varphi \notin Con(\emptyset)$ sii $\not\models \bigwedge_{\varphi\in\Gamma_0} \varphi$. Es decir, lo que se pide probar es equivalente a demostrar que $\bigwedge_{\varphi\in\Gamma_0} \varphi$ no es una tautología.

Supongamos por el absurdo que $\bigwedge_{\varphi\in\Gamma_0} \varphi$ es una tautología, y supongamos $\bigwedge_{\varphi\in\Gamma_0} \varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$. Probemos primero el siguiente lema:

Lema 1. Si $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ es una tautología, entonces cada φ_i es una tautología.

Demostración. Supongamos por el absurdo que el lema no se cumple. Entonces existe un φ_j tal que no es una tautología. Eso implica que existe una valuación V tal que $V(\varphi_j) = 0$. Pero entonces $V(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) = V(\varphi_1) \times \cdots \times V(\varphi_j) \times \cdots \times V(\varphi_n) = 0$. Esto es un absurdo, dado que suponíamos $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ una tautología. $\square$

Entonces, por el lema que acabamos de probar, si $\bigwedge_{\varphi\in\Gamma_0} \varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ es una tautología, cada φ_i es una tautología. Esto es lo mismo que decir que $\Delta \models \varphi_i$ para todo conjunto de fórmulas Δ, o lo que es igual, que $\varphi_i \in Con(\Delta)$ para todo Δ. En particular, $\varphi_i \in Con(\Gamma \setminus \{\varphi_i\})$, y como además sabíamos que $\varphi_i \in \Gamma$, eso implica que Γ no es independiente. Esto es un absurdo, con lo cual $\{\bigwedge_{\varphi\in\Gamma_0} \varphi\}$ es independiente. $\square$

Ejercicio 2. Vamos a extender el lenguaje de la lógica proposicional con $\top$ y $\bot$ (con la interpretación usual, $V(\top) = 1$ y $V(\bot) = 0$ para toda V). Sean los operadores $\varphi^p_\top$ y $\varphi^p_\bot$, que reemplazan uniformemente p en φ por $\top$ y $\bot$ respectivamente. Se define con ellos el operador $\varphi^p_\star = \varphi^p_\top \vee \varphi^p_\bot$. Demostrar:

a) $\{\varphi\} \models \varphi^p_\star$

b) Si $\{\varphi\} \models \psi$ y p no aparece en ψ, entonces $\{\varphi^p_\star\} \models \psi$

Demostración. Primero vamos a demostrar el punto a). Observando la semántica del operador $\varphi^p_\star$, vamos a probar primero el siguiente lema:

Lema 2. Sea V una valuación:

1) Si $V(p) = 1$, entonces $V(\varphi) = V(\varphi^p_\top)$.

2) Si $V(p) = 0$, entonces $V(\varphi) = V(\varphi^p_\perp)$.

Demostración. Veamos primero el punto 1). Lo demostramos por inducción en la estructura de φ. Vamos a suponer que el lenguaje tiene sólo negación e implicación, y que el resto de los operadores son "macros".

- Caso proposicional. Este caso se subdivide en dos. Si $\varphi = q$, con $q \neq p$, entonces $q^p_\top = q$, con lo cual no hay nada que probar. Por otro lado, si $\varphi = p$, entonces $V(p) = 1$ por hipótesis, y por otro lado $V(p^p_\top) = V(\top) = 1$, con lo cual este caso queda probado.

- Negación. $\varphi = \neg\psi$. Sabemos que $V(\varphi) = V(\neg\psi) = 1 - V(\psi)$. Acá podemos aplicar la HI, y llegar a que $1 - V(\psi) = 1 - V(\psi^p_\top)$. Usando la definición semántica, $1 - V(\psi^p_\top) = V(\neg(\psi^p_\top))$. Sabiendo que el operador de reemplazo afecta sólo los símbolos proposicionales, concluimos que $V(\neg(\psi^p_\top)) = V((\neg\psi)^p_\top) = V(\varphi^p_\top)$.

- Implicación. $\varphi = \psi_1 \to \psi_2$. Sabemos que $V(\psi_1 \to \psi_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } V(\psi_1) = 0 \text{ ó } V(\psi_2) = 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$.
  Por HI, sabemos que $V(\psi_1) = V({\psi_1}^p_\top)$ y que $V(\psi_2) = V({\psi_2}^p_\top)$, por lo tanto, podemos reemplazar lo anterior por $V(\psi_1 \to \psi_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } V({\psi_1}^p_\top) = 0 \text{ ó } V({\psi_2}^p_\top) = 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, y usando la definición semántica de la implicación, llegamos a que $V(\psi_1 \to \psi_2) = V({\psi_1}^p_\top \to {\psi_2}^p_\top)$. Nuevamente por como está definido el operador de reemplazo, concluimos que $V(\psi_1 \to \psi_2) = V((\psi_1 \to \psi_2)^p_\top) = V(\varphi^p_\top)$.

El punto 2) del lema es análogo. $\square$

Ahora vamos a intentar usar el lema para demostrar lo que nos pedían. Ver $\{\varphi\} \models \varphi^p_\star$ es lo mismo que ver $\{\varphi\} \models \varphi^p_\top \vee \varphi^p_\perp$. Sea V arbitraria tal que $V(\varphi) = 1$. Tenemos que ver que $V(\varphi^p_\top \vee \varphi^p_\perp) = 1$. Esta valuación V puede darle a p el valor 0 ó 1, así que vamos a analizar cada caso.

- $V(p) = 1$. Por el Lema 2, $V(\varphi) = V(\varphi^p_\top)$, y además sabemos que $V(\varphi) = 1$. Por la semántica del $\vee$, podemos concluir que $V(\varphi) = 1 = V(\varphi^p_\top) = V(\varphi^p_\top \vee \varphi^p_\perp)$.

- $V(p) = 0$. En forma análoga, por el Lema 2, $V(\varphi) = 1 = V(\varphi^p_\perp) = V(\varphi^p_\top \vee \varphi^p_\perp)$.

Por lo tanto $V(\varphi^p_\star) = 1$. Esto significa que $\{\varphi\} \models \varphi^p_\star$.

Ahora vamos a probar el punto b). Sabemos que $\{\varphi\} \models \psi$ y que p no aparece en ψ. Supongamos una valuación V tal que $V(\varphi^p_\star) = 1$. Queremos probar que entonces $V(\psi) = 1$. Como $V(\varphi^p_\star) = 1$, sucede que $V(\varphi^p_\perp) = 1$ ó $V(\varphi^p_\top) = 1$. Separemos entonces en estos dos casos:

- $V(\varphi^p_\top) = 1$. Sea $V' = V$ salvo quizás $V'(p) = 1$. Como $\varphi^p_\star$ no contiene a la proposición p, es claro que $V(\varphi^p_\star) = V'(\varphi^p_\star) = 1$. Por el Lema 2, $V'(\varphi) = 1$. Ahora, como sabemos que $\{\varphi\} \models \psi$, sucede $V'(\psi) = 1$. Como por hipótesis p tampoco está en ψ, $V'(\psi) = V(\psi) = 1$.

- $V(\varphi^p_\perp) = 1$. Este caso es análogo al anterior, definiendo $V' = V$ salvo quizás $V'(p) = 0$ y usando la segunda parte del Lema 2.

Por lo tanto $\{\varphi_{\star}^{p}\} \models \psi$. $\square$

Ejercicio 3. (este ejercicio fue a título informativo). Una lógica tiene *interpolación* siempre que si $\{\varphi\} \models \psi$, entonces existe un interpolante χ tal que $vars(\chi) \subseteq vars(\varphi) \cap vars(\psi)$ y se cumple que $\{\varphi\} \models \chi$ y $\{\chi\} \models \psi$. Mostrar que la lógica proposicional tiene interpolación.

Demostración. Supongamos $\{\varphi\} \models \psi$ y sean $p_1, \ldots, p_n$ las variables proposicionales de φ que no están en ψ. La idea es aplicar el operador $\varphi_{\star}^{p_i}$ iterativamente para cada p_i. Lo aplicamos primero sobre φ para p_1. Por el ejercicio anterior sabemos que: $\{\varphi\} \models \varphi_{\star}^{p_1}$, y como sabemos que $p_1 \notin \psi$, también tenemos que $\{\varphi_{\star}^{p_1}\} \models \psi$. Si aplicamos el operador sobre $\varphi_{\star}^{p_1}$ para p_2, de la misma manera obtenemos $\{\varphi\} \models (\varphi_{\star}^{p_1})_{\star}^{p_2}$ y $\{(\varphi_{\star}^{p_1})_{\star}^{p_2}\} \models \psi$. Si lo aplicamos de esta manera para todas las p_i, obtenemos: $\{\varphi\} \models ((\cdots(\varphi_{\star}^{p_1})\cdots)_{\star}^{p_n}$ y $\{((\cdots(\varphi_{\star}^{p_1})\cdots)_{\star}^{p_n}\} \models \psi$. Observar que la fórmula $((\cdots(\varphi_{\star}^{p_1})\cdots)_{\star}^{p_n}$ no contiene a las proposiciones $p_1, \ldots, p_n$, con lo cual dicha fórmula sólo tiene proposiciones en el lenguaje común de φ y ψ. Esto significa que $((\cdots(\varphi_{\star}^{p_1})\cdots)_{\star}^{p_n}$ es un interpolante para φ y ψ. $\square$