Parcial de computabilidad

Lógica y computabilidad

Segundo cuatrimestre de 2017

El examen es a libro abierto y se puede suponer demostrado lo dado en las clases y los ejercicios de las guías colocando referencias claras. Entregar cada ejercicio en hojas separadas. En cada hoja debe figurar nombre, apellido y número de orden.

Ejercicio 1. Dados dos programas P y Q en el lenguaje $\mathcal{S}$, decimos que P *es menor o igual que* Q si se cumplen las siguientes tres condiciones:

- la cantidad de instrucciones de P es menor o igual a la cantidad de instrucciones de Q.
- si una etiqueta aparece en P entonces aparece en Q. *Nota: Se consideran también las etiquetas que aparecen en la guarda de una instrucción del tipo IF.*
- si una variable aparece en P entonces aparece en Q.

Demostrar que el siguiente predicado es p.r.:

$$h(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si el programa con número } x \text{ es menor o igual que el programa con número } y \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Ejercicio 2. Sean P y Q dos programas en el lenguaje $\mathcal{S}$ y $n \geq 1$. Usando la definición del ejercicio anterior, decimos que P *es más eficiente que* Q *en los primeros* n *valores* si P es menor o igual que Q y para todo $0 \leq j \leq n-1$, $\Psi_Q^{(1)}(j)\downarrow$, $\Psi_P^{(1)}(j)\downarrow$ y la ejecución de P requiere menor o igual cantidad de pasos que la de Q. Decidir si el siguiente conjunto es c.e. o no para $n \in \mathbb{N}$. Justificar.

$$A_n = \{\langle x,y\rangle \mid \text{ el programa con número } x \text{ es más eficiente en los primeros } n \text{ valores que el programa con número } y\}$$

Ejercicio 3. Decidir si las siguientes funciones son o no computables. Justificar.

a. $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists n \mid \Phi_x^{(n+i)}(x_1,\cdots,x_{n+i}) = \Phi_x^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) \forall i \forall x_1,\cdots,x_{n+i} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

b. $$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_y^{(1)}(x)\downarrow \text{ y } \Phi_y^{(1)}(x) \geq 2 \text{ y } \Phi_x^{(1)}(0)\downarrow \text{ y } \Phi_y^{(1)}(x) = \Phi_x^{(1)}(0) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Ejercicio 4. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a. Si A es un conjunto c.e. entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $A \setminus \{n\}$ es un conjunto c.e. ($A \setminus \{n\}$ es el conjunto A sin el elemento n).

b. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{K} \setminus \{n\}$ es c.e.