6. INTEGRALES DOBLES Y TRIPLES

Teorema de Fubini:
$R = [a, b] \times [c, d]$; $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ continua $\Longrightarrow$

$$\iint_R f(x,y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

(El teorema también vale si f es acotada y el conjunto de discontinuidades de f es un subconjunto de R de área nula, ie, rectas).

Regiones elementales de $\mathbb{R}^2$:
Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$,

- D es región elemental de tipo 1 si
  Existen $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b;\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \right\}$$

  En este caso, si $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua , se define:

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

- D es región elemental de tipo 2 si
  Existen $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d;\ \psi_1(x) \leq x \leq \psi_2(x) \right\}$$

  En este caso, si $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua , se define:

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y) dx \right) dy$$

- D es región elemental de tipo 3 si es región elemental de tipo 1 y 2.

Definición:
Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es una región elemental se define el área de D como:

$$\acute{A}(D) = \iint_D dxdy$$

Teorema del valor medio para integrales dobles:
$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua; D región elemental, entonces:

$$\exists\ (x_0, y_0) \in D \text{ tal que } \iint_D f(x,y)\, dxdy = f(x_0, y_0)\acute{A}(D)$$

Transformaciones en $\mathbb{R}^2$:
Sean D^* y $D \subseteq \mathbb{R}^2$ regiones elementales, $T : D^* \longrightarrow D$
$T(u,v) = \Big(x(u,v), y(u,v)\Big)$ se dice transformación si:

i) $T \in C^1$

ii) $T(D^*) = D$, ie, T es suryectiva

iii) T es inyectiva salvo quizás un subconjunto de área nula de D^*

Definición:
Dada $T : D^* \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow D \subseteq \mathbb{R}^2$ transformación; $T(u,v) = \Big(x(u,v), y(u,v)\Big)$, se define el Jacobiano de T como:

$$J(T)(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

Fórmula de cambio de variable para integrales dobles:
Sean $D^*, D \subseteq \mathbb{R}^2$ regiones elementales; $T : D^* \longrightarrow D$ una transformación; $T(u,v) = \Big(x(u,v), y(u,v)\Big)$; $J(T)(u,v) \neq 0$ salvo quizás un subconjunto de área nula de D^*.
Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua salvo quizás un subconjunto de área nula de D, entonces:

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy = \iint_{D*} f\Big(T(u,v)\Big)\Big|J(T)(u,v)\Big|\ dudv$$

Coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r \cdot cos(\theta) & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = r \cdot sen(\theta) & r \geq 0 \end{cases}$$

$D^* = [0,b] \times [0,2\pi]$ $\qquad$ $x^2 + y^2 = r^2 \leq b$

$T : D^* \longrightarrow D$; $T(r,\theta) = \Big(r \cdot cos(\theta), r \cdot sen(\theta)\Big)$ $\qquad$ $J(T) = r$

Teorema de Fubini:
Sea Q un cubo tal que $Q = [a,b] \times [c,d] \times [r,s] \subseteq \mathbb{R}^3$ $(a,b,c,d,r,s \in \mathbb{R})$
Sea $Q \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces:

$$\iiint_Q f(x,y,z)\ dxdydz = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x,y,z)\ dzdydx$$

(todas las permutaciones de los intervalos son válidas)

<u>Regiones elementales de $\mathbb{R}^3$:</u>
Sea $W \in \mathbb{R}^3$,

- <u>W es región elemental de tipo 1 si</u>
  $\exists\, D \subseteq \mathbb{R}^2$ región elemental de tipo 1 ó 2 en el plano $xy \wedge \exists\, \alpha_1, \alpha_2 : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que:

  $$W = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b;\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x);\ \alpha_1(x, y) \leq z \leq \alpha_2(x, y)\Big\}$$

  ó

  $$W = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq y \leq d;\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y);\ \alpha_1(x, y) \leq z \leq \alpha_2(x, y)\Big\}$$

  En estos casos, si $f : W \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua:

  D tipo 1: $$\iiint_W f(x, y, z)\, dxdydz = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\alpha_1(x,y)}^{\alpha_2(x,y)} f(x, y, z)\, dzdydx$$

  D tipo 2: $$\iiint_W f(x, y, z)\, dxdydz = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{\alpha_1(x,y)}^{\alpha_2(x,y)} f(x, y, z)\, dzdxdy$$

- <u>W es región elemental de tipo 2 si</u>
  Ídem en el plano yz.

- <u>W es región elemental de tipo 3 si</u>
  Ídem en el plano xz.

- <u>W es región elemental de tipo 4 si</u> es región elemental de tipo 1, 2 y 3.

<u>Definición:</u>
Sea $W \subseteq \mathbb{R}^3$ una región elemental, se define el volumen de W como:

$$V(W) = \iiint_W dxdydz$$

<u>Transformaciones en $\mathbb{R}^3$:</u>
Sean W^* y $W \subseteq \mathbb{R}^3$ regiones elementales, $T : W^* \longrightarrow W$
$T(u, v, w) = \Big(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\Big)$ se dice transformación si:

i) $T \in C^1$

ii) $T(W^*) = W$, ie, T es suryectiva

iii) T es inyectiva salvo quizás un subconjunto de volumen nulo de W^*

Definición:

Dada $T : W^* \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow W \subseteq \mathbb{R}^3$ transformación; $T(u,v,w) = \Big(x(u,v,w),$ $y(u,v,w), z(u,v,w)\Big)$, se define el Jacobiano de T como:

$$J(T)(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial x}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial y}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial z}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial z}{\partial w}(u,v,w) \end{pmatrix}$$

Fórmula de cambio de variable para integrales triples:

Sean $W^*, W \subseteq \mathbb{R}^3$ regiones elementales; $T : W^* \longrightarrow W$ una transformación; $T(u,v,w) = \Big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\Big)$; $J(T)(u,v,w) \neq 0$ salvo quizás un subconjunto de volumen nulo de W^*.

Sea $f : W \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua salvo quizás un subconjunto de volumen nulo de W, entonces:

$$\iint_W f(x,y,z)\, dxdydz = \iint_{W*} f\Big(T(u,v,w)\Big)\Big|J(T)(u,v,w)\Big|\, dudvdw$$

Coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = r \cdot cos(\theta) & r \geq 0 \\ y = r \cdot sen(\theta) & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = z & z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$0 \leq a < b;\ 0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi;\ c < d$

$W^* = [a,b] \times [\theta_1, \theta_2] \times [c,d];\ T(r,\theta,z) = \Big(r \cdot cos(\theta), r \cdot sen(\theta), z\Big)$

$J(T)(r,\theta,z) = r$

Coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot sen(\phi) \cdot cos(\theta) & \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \ (\rho \geq 0) \\ y = \rho \cdot sen(\phi) \cdot sen(\theta) & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = \rho \cdot cos(\phi) & 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$T(\rho,\theta,\phi) = \Big(\rho \cdot sen(\phi) \cdot cos(\theta), \rho \cdot sen(\phi) \cdot sen(\theta), \rho \cdot cos(\phi)\Big)$$

$$\Big|J(T)(\rho,\theta,\phi)\Big| = \rho^2 \cdot sen(\phi) \quad \text{con } 0 \leq \phi \leq \pi$$