

# Algebra 1

EXAMEN FINAL - 24/7/2019

Nombre y Apellido: .....

Carrera: .....Libreta Universitaria: .....

1. Notamos  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  y consideramos la función  $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  definida por

$$f(x, y) = 2^x(2y + 1) - 1.$$

Probar que  $f$  es biyectiva.

2. Probar que

$$2^{\frac{(n-1)n(n+1)}{6}} \mid (2^n - 1)! \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Se recuerda que  $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$

3. Sean  $a, b$  números enteros no nulos que verifican la siguiente propiedad:

$$\text{para todo entero } c, \text{ si } a \mid c \text{ y } b \mid c \text{ entonces } ab \mid c$$

Probar que  $a$  y  $b$  son coprimos.

4. Sea  $a \in \mathbb{Z}$  tal que  $(7a^{103} + 18 : 132) = 33$ . Determinar el resto de dividir  $a$  por 66.
5. Sea  $f = X^9 + 18X^5 + 81X$ . Determinar la cantidad de divisores mónicos que tiene  $f$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$ .