



<input type="checkbox"/> Completar apellido en las hojas y numerarlas <input type="checkbox"/> Enviar <a href="#">aquí</a> fotos claras y legibles de la resolución <input type="checkbox"/> <b>Justificar todas las respuestas</b>	Nombre y Apellido			
	Goldberg Sofia Milena			
	Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Nota

1. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz con  $\det(A) = 1$ . Se desea realizar el proceso de triangulación de forma que queden unos en la diagonal de la matriz triangulada. Para ello se modifica el procedimiento de eliminación gaussiana agregando un paso extra antes de triangular la columna  $i$ -ésima, de forma que el pivote en la posición  $(i, i)$  sea 1. Para hacer esto, se multiplica a derecha por matrices de la forma  $B_i = I - b_i e_n e_i^t$ , siendo  $e_i$  el  $i$ -ésimo canónico de  $\mathbb{R}^n$ . (Ver ejemplo en la página anexa.)

(a) Sean  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matriz elemental de Gauss para realizar un primer paso de triangulación, y  $B_1 = I - b_1 e_n e_1^t$ , con  $b_1 \in \mathbb{R}$ . Sea además  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz tal que  $a_{1n} \neq 0$ .

i. Determinar  $b_1 \in \mathbb{R}$  tal que  $(AB_1)_{11} = 1$ . (6 puntos)

ii. Para el  $b_1$  del ítem anterior, determinar explícitamente los valores de  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que  $(MAB_1)e_1 = e_1$ . (7 puntos)

(b) Probar que  $B_i^{-1} = I + b_i e_n e_i^t$ . (6 puntos)

(c) Siendo  $B = B_1 B_2 \cdots B_{n-1}$ , probar que  $B^{-1} = I + \sum_{i=1}^{n-1} b_i e_n e_i^t$ . (7 puntos)

(d) Probar que  $|b_j| \leq \|I - B^{-1}\|_2 \leq \|I - B^{-1}\|_F^\ddagger$  para cualquier  $1 \leq j < n$ . (9 puntos)

2. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Llamamos  $cl_1(A), \dots, cl_n(A)$  a las columnas de  $A$ .

(a) Probar que si  $A$  es inversible entonces  $A^t A$  admite una factorización de Cholesky  $A^t A = LL^t$  y en tal caso  $|\det(A)| = \prod_{i=1}^n l_{ii}$ . (10 puntos)

(b) En la hipótesis del ítem anterior, probar que  $l_{ii} \leq \|cl_i(A)\|_2$ . (10 puntos)

(c) Probar que  $|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \|cl_i(A)\|_2$  y que vale la igualdad si y sólo si las columnas de  $A$  forman un conjunto ortogonal. (12 puntos)

3. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $A + I$  es inversible. Considere la siguiente operación  $f$  sobre estas matrices:

$$A \mapsto (I - A)(I + A)^{-1}$$

(a) Demostrar que  $f(f(A)) = A$ . (10 puntos)

(b) Probar que si  $A$  es antisimétrica entonces  $f(A)$  es ortogonal. (11 puntos)

(c) Decimos que  $A$  antisimétrica y  $Q$  ortogonal están asociadas si  $f(Q) = A$ . Calcular la matriz ortogonal  $Q$  asociada a la siguiente matriz antisimétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Es  $Q$  una matriz de Householder, una de Givens o ninguna de las dos?

(12 puntos)

$\ddagger \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$  es la norma Frobenius de la matriz  $A$ .

Ejemplo Ejercicio 1 para matriz  $A$  de  $3 \times 3$ ,  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\det(A) = 1$ .

- $B_i = I - b_i e_n e_i^t$  para  $b_i$  convenientes.
- $M_i$  es la  $i$ -ésima matriz elemental de Gauss para triangular la columna  $i$ .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow AB_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^{(1)} = M_1 AB_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Continuando,

$$A^{(1)}B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^{(2)} = M_2 A^{(1)}B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

Llegamos a:

$$M_2 M_1 A B_1 B_2 = U \Leftrightarrow A = \underbrace{M_1^{-1} M_2^{-1}}_L U \underbrace{B_2^{-1} B_1^{-1}}_B$$

Con  $L$ ,  $U$  y  $B$  matrices de diagonales con unos y  $A = LUB$ .