

1	2	3	4
B/B-	B	B/B-	B

CALIF.
10

APELLIDO Y NOMBRE:

LIBRETA:

CARRERA:

CUATR. APROBACIÓN TPs:

CUATR. APROBACIÓN TALLER:

¿LLENÓ LA ENCUESTA?

Algebra I
Examen Final (21/12/2022)

1. Sea \mathcal{R} la relación en $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, \dots, 10\})$ definida como:

$$A\mathcal{R}B \text{ si y solo si } A \Delta B \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

(a) Probar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.

(b) ¿Cuántos conjuntos B hay en la clase de equivalencia de $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$?

2. Sea $k \in \mathbb{Z}$ tal que $(k^7 + 3 : 28) = 14$ y $11 \mid k^{401} + 4k + 1$. Calcular los posibles restos de dividir k por 308.

3. Sea $f = X^{12} - 3X^4 + a \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f tiene raíces múltiples.

(b) Para cada valor de a hallado, calcular todas las raíces múltiples de f con sus respectivas multiplicidades.

4. Se define la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polinomios en $\mathbb{R}[X]$ del siguiente modo:

$$f_1 = X^3 + 2X^2 + X,$$

$$f_2 = X^4 - 6X^2 - 8X - 3,$$

$$f_{n+2} = (X^3 - 3X - 2)f_{n+1} + (X^3 + X^2 - X - 1)f_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Calcular la multiplicidad de -1 como raíz de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1) a) \mathcal{R} es de equivalencia $\Leftrightarrow \mathcal{R}$ es reflexivo, simétrico y transitivo

reflexividad

\mathcal{R} reflexivo si

$$A \mathcal{R} A, \forall A \in \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, 10\})$$

a partir de acá uso $Q = \{1, 2, \dots, 10\}$

$$A \mathcal{R} A \Leftrightarrow A \Delta A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\text{pero } A \Delta A = Q \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

✓

entonces \mathcal{R} es reflexivo

simetría

\mathcal{R} simétrica si

$$A \mathcal{R} B \Leftrightarrow B \mathcal{R} A \quad A, B \in \mathcal{P}(Q)$$

$$A \mathcal{R} B \Leftrightarrow (A \Delta B \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}) \Leftrightarrow (B \Delta A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}) \Leftrightarrow B \mathcal{R} A$$

entonces \mathcal{R} es simétrica

✓

transitividad

\mathcal{R} transitiva si

$$A \mathcal{R} B \wedge B \mathcal{R} C \Rightarrow A \mathcal{R} C \quad A, B, C \in \mathcal{P}(Q)$$

$$A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \Delta B \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \Leftrightarrow [(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B) / \forall x \in \{8, 9, 10\}]$$

$$B \mathcal{R} C \Leftrightarrow B \Delta C \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \Leftrightarrow [(x \in B \wedge x \in C) \vee (x \notin B \wedge x \notin C) / \forall x \in \{8, 9, 10\}]$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{para cada } x \in \{8, 9, 10\} \\ \text{si } x \in B \Rightarrow x \in A \wedge x \in C \\ \text{si } x \notin B \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin C \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(x \in A \wedge x \in C) \vee (x \notin A \wedge x \notin C) / \forall x \in \{8, 9, 10\}] \Leftrightarrow A \Delta C \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \mathcal{R} C$$

entonces \mathcal{R} es transitiva

h. i. v.

como \mathcal{R} es reflexiva, simétrica y transitiva, \mathcal{R} es una relación de equivalencia.

$$b) B \in \bar{A} \Leftrightarrow B \Delta Q \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ \{8, 9, 10\} \subseteq B$$

~~Seguro~~ Seguro $B \subseteq \{8, 9, 10\}$ ya que la diferencia simétrica debe sacarlos del resultado, pero puede o no contener a todos los números entre 1 y 7
hay entonces 2^7 conjuntos en la clase de equivalencia de A

B

$$2) (K^7 + 3 : 28) = 14$$

$$14 | K^7 + 3 \Leftrightarrow K^7 + 3 \equiv 0 (14) \stackrel{2 \perp 7}{\Leftrightarrow} \begin{cases} K^7 + 3 \equiv 0 (2) \\ K^7 + 3 \equiv 0 (7) \end{cases}$$

$$K^7 + 3 \equiv 0 (2) \Leftrightarrow K + 1 \equiv 0 (2) \Leftrightarrow \underline{K \equiv 1 (2)} \checkmark$$

$K^7 + 3 \equiv 0 (7)$ como 7 es primo, o bien $7 | K$ o $K \perp 7$

si $7 | K$

$$K^7 + 3 \equiv 0^7 + 3 \equiv 3 \not\equiv 0 (7) \Rightarrow K \perp 7$$

$$K^7 + 3 \equiv K^{\varphi(7)} + 3 \equiv K + 3 (7)$$

PTF
 $K \perp 7$

$$K + 3 \equiv 0 (7) \Leftrightarrow \underline{K \equiv 4 (7)} \checkmark$$

como $28 = 2^2 \cdot 7 \Rightarrow 4 \nmid K^7 + 3$ (sino el mcd sería 28) \checkmark

$$14 = 2 \cdot 7$$

como $K \equiv 1 (2) \Rightarrow K \equiv 1 (14) \vee K \equiv 3 (14)$

si $K \equiv 1 (14)$

$$K^7 + 3 \equiv 1 + 3 \equiv 0 (14) \text{ abs ya que } 4 \nmid K^7 + 3$$

$$\Rightarrow \underline{K \equiv 3 (14)} \checkmark$$

$$K^7 + 3 \equiv 3^7 + 3 \equiv 3 + 3 \equiv 2 (14) \text{ (chequeo que no sea absurdo)}$$

$$11 | K^{401} + 4K + 1 \text{ como } 11 \text{ es}$$

$$K^{401} + 4K + 1 \equiv 0 (11) \text{ como } 11 \text{ es primo, o bien } 11 | K \text{ o } K \perp 11$$

si $11 | K$

$$K^{401} + 4K + 1 \equiv 0^{401} + 4 \cdot 0 + 1 \equiv 1 (11) \text{ abs ya que } 11 | K^{401} + 4K + 1$$

$$\Rightarrow K \perp 11$$

$$K^{401} + 4K + 1 \equiv K^{\varphi_{10}(401)} + 4K + 1 \equiv K + 4K + 1 \equiv 5K + 1 (11) \checkmark$$

PTF
 $K \perp 11$

$$5K + 1 \equiv 0 \pmod{11} \Leftrightarrow 5K \equiv 10 \pmod{11} \Leftrightarrow K \equiv 2 \pmod{11}$$

↓
como 11 es primo

$$\exists! K \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \text{ tal que } 5 \cdot K \equiv 10 \pmod{11}$$

en resumen

$$K \equiv 1 \pmod{2}, \quad K \equiv 3 \pmod{4}, \quad K \equiv 4 \pmod{7}, \quad K \equiv 2 \pmod{11} \quad \checkmark$$

$$308 = 2^2 \cdot 7 \cdot 11$$

$$\left. \begin{array}{l} K \equiv 3 \pmod{4} \\ K \equiv 4 \pmod{7} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \perp 7 \\ \Rightarrow K \equiv 11 \pmod{28} \end{array} \left. \begin{array}{l} 28 \perp 11 \\ \Rightarrow K \equiv 123 \pmod{308} \end{array} \right\}$$

$$K \equiv 2 \pmod{11}$$

$\Gamma_{308}(K) = 123$



3) a) $F = X^{12} - 3X^4 + a \in \mathbb{C}[X]$

$$\begin{aligned}
 F' &= 12X^{11} - 12X^3 = 12X^3(X^8 - 1) = 12X^3(X^4 - 1)(X^4 + 1) \\
 &= 12X^3(X^2 - 1)(X^2 + 1)(X^4 + 1) = 12X^3(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) = \\
 &= 12X^3(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)(x^2-i)(x^2+i) = \\
 &= 12X^3(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)(x+\sqrt{i})(x-\sqrt{i})(x+\sqrt{-i})(x-\sqrt{-i})
 \end{aligned}$$

las únicas posibles raíces múltiples son:

$$\{0, 1, -1, i, -i, \sqrt{i}, -\sqrt{i}, \sqrt{-i}, -\sqrt{-i}\}$$

0 es raíz si y solo si $F(0) = 0$

$$\begin{aligned}
 0^{12} - 3 \cdot 0^4 + a &= 0 \\
 a &= 0
 \end{aligned}$$

con $a=0$, F tiene raíz 0 de multiplicidad 4

1 es raíz si $F(1) = 0$

$$\begin{aligned}
 1^{12} - 3 \cdot 1^4 + a &= 0 \\
 -2 + a &= 0 \\
 a &= 2
 \end{aligned}$$

con $a=2$, F tiene raíz 1 de multiplicidad 2

-1 es raíz si $F(-1) = 0$

$$\begin{aligned}
 (-1)^{12} - 3 \cdot (-1)^4 + a &= 0 \\
 -2 + a &= 0 \\
 a &= 2
 \end{aligned}$$

con $a=2$, F tiene raíz -1 de multiplicidad 2

\sqrt{a} = número real positivo cuyo cuadrado es a .

No está definido para: $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
ni para $a \in \mathbb{R} < 0$

SÓLO para $a \in \mathbb{R} \geq 0$.

$$i \text{ raíz } \Leftrightarrow F(i) = 0$$

$$i^{12} - 3i^4 + 2 = 0$$

$$1 - 3 + 2 = 0$$

$$\lambda = 2$$

$$-i \text{ raíz } \Leftrightarrow F(-i) = 0$$

$$(-i)^{12} - 3(-i)^4 + 2 = 0$$

$$1 - 3 + 2 = 0$$

$$\lambda = 2$$

con $\lambda = 2$, F tiene raíces i y $-i$ de multiplicidad 2

$$\sqrt{i} \text{ raíz } \Leftrightarrow F(\sqrt{i}) = 0$$

$$(\sqrt{i})^{12} - 3(\sqrt{i})^4 + 2 = 0$$

$$i^6 - 3i^2 + 2 = 0$$

$$-1 + 3 + 2 = 0$$

$$2 + 2 = 0$$

$$\lambda = -2$$

con $\lambda = -2$, F tiene raíces \sqrt{i} y $-\sqrt{i}$ de multiplicidad 2

$$-\sqrt{i} \text{ raíz } \Leftrightarrow F(-\sqrt{i}) = 0$$

$$(-\sqrt{i})^{12} - 3(-\sqrt{i})^4 + 2 = 0$$

$$(i)^6 - 3i^2 + 2 = 0$$

$$\lambda = -2$$

$$-\sqrt{-i} \text{ raíz } \Leftrightarrow F(-\sqrt{-i}) = 0$$

$$(-\sqrt{-i})^{12} - 3(-\sqrt{-i})^4 + 2 = 0$$

$$(i)^6 - 3(-i)^2 + 2 = 0$$

$$\lambda = -2$$

con $\lambda = -2$, F tiene raíces $-\sqrt{i}$ y $-\sqrt{-i}$ de multiplicidad 2

a) ~~no se genera~~

F tiene raíces múltiples cuando $\lambda \in \{-2, 0, 2\}$

b) para $\lambda = 0$, F tiene ~~una~~ sola raíz múltiple; 0 ; de multiplicidad 4

para $\lambda = 2$, F tiene 4 raíces múltiples; $1, -1, i, -i$; todas de multiplicidad 2

para $\lambda = -2$, F tiene 4 raíces múltiples; $\sqrt{i}, \sqrt{-i}, -\sqrt{i}, -\sqrt{-i}$; todas de multiplicidad 2

4) $F_1 = X(X^2 + 2X + 1) = X(X+1)^2$ la raíz -1 tiene mult 2 en F_1 ✓

$F_2 = X^4 - 6X^2 - 8X - 3 = (X-3)(X+1)^3$ la raíz -1 tiene mult 3 en F_2 ✓

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & -6 & -8 & -3 \\ -1 & & -1 & 1 & 5 & 3 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -5 & -3 & 0 \\ -1 & & -1 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 1 & -2 & -3 & 0 & \\ -1 & & -1 & 3 & & \\ \hline 1 & 1 & -3 & 0 & & \end{array}$$

$F_3 = (X^3 - 3X - 2)(X-3)(X+1)^3 + (X^3 + X^2 - X - 1)X(X+1)^2$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & & -1 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & & -1 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} F_3 &= (X-2)(X-3)(X+1)^5 + (X-1)X(X+1)^4 = [(X-2)(X-3)(X+1) + X(X-1)](X+1)^4 = \\ &= [(X^2 - 5X + 6) + X^2 - X](X+1)^4 = \\ &= [2X^2 - 6X + 6](X+1)^4 = \\ &= 2(X^2 - 3X + 3)(X+1)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 0 & 6 \\ -1 & & -1 & 4 & -4 \\ \hline 1 & 1 & -4 & 4 & 2 \end{array} \quad \text{la raíz -1 tiene mult 4 en } F_3$$

creo que -1 tiene mult $n+1$ en $F_n \forall n \in \mathbb{N}$

lo veo por inducción completa ✓

casos base

$$F_1 = x^3 + 2x^2 + x = x(x+1)^2 \Rightarrow -1 \text{ tiene mult } 2 \text{ en } F_1$$

$$F_2 = x^4 - 6x^2 - 8x - 3 = (x-3)(x+1)^3 \Rightarrow -1 \text{ tiene mult } 3 \text{ en } F_2$$

paso inductivo

HI: $F_h = P_h(x)(x+1)^{h+1}$ donde $P_h(x)$ es un polinomio no divisible por $x+1$
 $\forall h \leq k \in \mathbb{N}$ ✓

gug $F_{k+1} = P_{k+1}(x)(x+1)^{k+2}$ donde $P_{k+1}(x)$ no es divisible por $x+1$

$$F_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} (x^3 - 3x - 2)F_k + (x^3 + x^2 - x - 1)F_{k-1}$$

$$F_{k+1} = (x-2)(x+1)^2 F_k + (x-1)(x+1)^2 F_{k-1}$$

por HI

$$F_{k+1} = (x-2)(x+1)^2 P_k(x)(x+1)^{k+1} + (x-1)(x+1)^2 P_{k-1}(x)(x+1)^k$$

$$F_{k+1} = \left[(x-2)(x+1)P_k(x) + (x-1) \cancel{P_{k-1}(x)} \right] (x+1)^{k+2}$$

$P_{k-1}(x)$

si $(x-2)(x+1)P_k(x) + (x-1)P_{k-1}(x)$ no es divisible por $x+1$ puede tomarse como $P_{k+1}(x)$

si $(x-2)(x+1)P_k(x) + (x-1)P_{k-1}(x)$ es divisible por $x+1$, existe $Q(x)$ polinomio tal que

$$(x-2)(x+1)P_k(x) + (x-1)P_{k-1}(x) = Q(x)(x+1)$$

$$(x-2)(x+1)P_k(x) - Q(x)(x+1) = (x-1)P_{k-1}(x)$$

$$\left[(x-2)P_k(x) - Q(x) \right] (x+1) = (x-1)P_{k-1}(x)$$

pero esto es absurdo ya que por HI $P_{k-1}(x)$ no es divisible por $x+1$

251 que $P_{k+1}(x) = (x-2)(x+1)P_k(x) + (x-1)P_{k-1}(x)$ no es divisible por $x+1$

entonces suponemos \geq

$$P_{k+1} = [(x-2)(x+1)P_k(x) + (x-1)P_{k-1}(x)](x+1)^{k+2}$$

$$P_{k+1} = P_{k+1}(x)(x+1)^{k+2} \text{ luego } P_{k+1}(x) \text{ no es divisible por } x+1$$

que lo demostramos entonces por inducción que

\rightarrow tiene multiplicidad $n+1$ en $P_n \forall n \in \mathbb{N}$

B