

Probabilidad y Estadística (C) - Final - 13/12/2018

Examen Final. (20/12/18)

Criterio de aprobación: El examen consta de dos partes A y B. En la Parte A, cada ejercicio resuelto correctamente suma un punto. En la Parte B, el ejercicio suma 6 puntos. El final se aprueba con 6 puntos y NO podrá sumar más de 5 puntos de cada parte

**Parte A**

1. Un alumno está rindiendo un examen. La probabilidad de que sepa la respuesta de una pregunta es 0,8. De no saberla, la probabilidad de responder correctamente es de  $\frac{1}{3}$

- a) Calcular la probabilidad de responder correctamente una pregunta
- b) Calcular la probabilidad de que el alumno supiera la respuesta viendo que respondió correctamente.

2. Dada la siguiente tabla de densidad conjunta:

	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
$x_1$	0.09	0.02	0.11	0.02
$x_2$	0.05	0.03	0.06	0.02
$x_3$				
$x_4$				

- a) Calcular  $P(X = x_2; Y = y_3)$
- b) Calcular  $P(X = x_1)$
- c) Completar la tabla de modo que  $P(X = x_3)$  sea siempre igual

3. Sean  $X_1, \dots, X_n$  v.a. independientes, completar:

- a) Si  $X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p) \Rightarrow \sum_{i=1}^k X_i \sim \dots$
- b) Si  $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^k X_i \sim \dots$
- c) Si  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^k X_i \sim \dots$
- d) Si  $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^k X_i \sim \dots$

4. Un alumno rinde un examen de 100 preguntas. La probabilidad de responder correctamente cada pregunta es de 0,65. El examen se aprueba con 60 preguntas correctas o más. Calcular de manera aproximada la probabilidad de aprobar.

5. Sean  $X_1, \dots, X_n$  v.a. i.i.d. con distribución  $\mathcal{U}(0, \theta)$

- a) Halle  $\hat{\theta}_n$  el estimador de máxima verosimilitud de  $\theta$
- b) Determine si el estimador  $\hat{\theta}_n$  es consistente. Justifique todas sus respuestas.

6. No lo copié

7. Sean  $X_1, \dots, X_n$  v.a. i.i.d. con  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 4)$ .

Para

$$H_0 = \{\mu = 5\} \quad vs. \quad H_1 = \{\mu > 5\}$$

se determinó un  $p$ -valor de 0,0606. ¿Rechazo con un  $\alpha = 0,05$ ? Hallar el promedio muestral sabiendo que  $n = 9$

### Parte B

1. Enuncie y demuestre la Ley de los Grandes Números. Incluya previamente todas las definiciones y conceptos que considere pertinentes.

2. Proponga un ejercicio (escriba el enunciado) cuya resolución requiera invocar la Ley de los Grandes Números. No incluya la resolución del ejercicio.

### Resolución:

1. Un alumno está rindiendo un examen. La probabilidad de que sepa la respuesta de la pregunta es 0,8. De no saberla, la probabilidad de responder correctamente es de  $\frac{1}{3}$

Denomino  $S$  al evento de saber la respuesta.

Denomino  $C$  al evento de responder correctamente la pregunta.

Datos que tengo:  $P(S) = 0,8$   $P(C|S^c) = \frac{1}{3}$

a)  $P(C) \stackrel{TPT}{=} P(C|S) \cdot P(S) + P(C|S^c) \cdot P(S^c) \rightarrow$  (TPT = Teorema de Probabilidad Total)

$$P(C) = 1 \cdot 0,8 + \frac{1}{3} \cdot 0,2 = \frac{13}{15}$$

$P(S|C) \stackrel{Def}{=} \frac{P(S \cap C)}{P(C)} \stackrel{R.M.}{=} \frac{P(C|S) \cdot P(S)}{P(C)} = \frac{1 \cdot 0,8}{\frac{13}{15}} = \frac{12}{13} \rightarrow$  (R.M = Regla Multiplicativa)

2) a)  $P(X = x_2; Y = y_3) \stackrel{Tabla}{=} 0,06$

b)  $P(X = x_1) = P(X = x_1; Y = y_1) + P(X = x_1; Y = y_2) + P(X = x_1; Y = y_3) + P(X = x_1; Y = y_4)$

$$P(X = x_1) = \quad 0,09 \quad + \quad 0,02 \quad + \quad 0,11 \quad + \quad 0,02 \quad = 0,24$$

c) Sé que  $P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + P(X = x_4) = 1$

$$0,24 \quad + \quad 0,16 \quad + \quad P(X = x_3) + P(X = x_4) = 1 \quad (P(X = x_2) \text{ lo calculé igual que en b)}$$

$$P(X = x_3) + P(X = x_4) = 0,6$$

$$\Rightarrow 0 \leq P(X = x_3) \leq 0,6$$

Voy a tomar  $P(X = x_3) = 0,4$  y completaré la tabla de manera de cumplir con lo pedido.

	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
$x_1$	0.09	0.02	0.11	0.02
$x_2$	0.05	0.03	0.06	0.02
$x_3$	0.1	0.1	0.1	0.1
$x_4$				

3. Sean  $X_1, \dots, X_n$  v.a. independientes, completar:

Para completar este ejercicio voy a utilizar que como  $X_1, \dots, X_n$  v.a. independientes  $\Rightarrow M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$

a) Si  $X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p) \Rightarrow \sum_{i=1}^k X_i \sim \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^k n_i, p\right)$

b) Si  $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^k X_i \sim \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right)$

c) Si  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^k X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^k \mu_i, \sum_{i=1}^k \sigma_i^2\right)$

d)  $M_{\frac{\sum X_i}{\sqrt{k}}}(t) = M_{\sum X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{k}}\right) = \prod_{i=1}^k M_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{k}}\right) = \prod_{i=1}^k e^{\frac{t^2}{2k}} = e^{\frac{1}{2k} \sum t_i^2} = e^{\frac{kt^2}{2k}} = e^{\frac{t^2}{2}} = M_z(t) \left(z \sim \mathcal{N}(0,1)\right)$

$\Rightarrow$  Si  $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^k X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$

4) Defino la variable aleatoria  $X_i =$  "Responder la  $i$ -ésima pregunta correctamente"

$X_i \sim \mathcal{B}(1, 0,65)$

$\stackrel{Ej3}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{100} X_i \sim \mathcal{B}(100, 0,65)$

Por comodidad llamaré  $X_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$

Me piden calcular  $P(X_{100} \geq 60) = 1 - P(X_{100} < 60)$

$$1 - P(X_{100} < 60)$$

$$1 - P\left(\frac{X_{100} - 100 \cdot 0,65}{\sqrt{100 \cdot 0,65(1 - 0,65)}} < \frac{60 - 100 \cdot 0,65}{\sqrt{100 \cdot 0,65(1 - 0,65)}}\right)$$

$$1 - P\left(\frac{X_{100} - 65}{\sqrt{22,75}} < \frac{-5}{\sqrt{22,75}}\right)$$

$1 - P\left(\frac{X_{100} - 65}{\sqrt{22,75}} < \frac{-5}{\sqrt{22,75}}\right) \stackrel{TCL}{\cong} 1 - \Phi\left(\frac{-5}{\sqrt{22,75}}\right) \simeq 1 - \Phi(-1,04) \simeq \Phi(1,04) = 0,8508$

5. Sean  $X_1, \dots, X_n$  v.a. i.i.d. con distribución  $\mathcal{U}(0, \theta)$

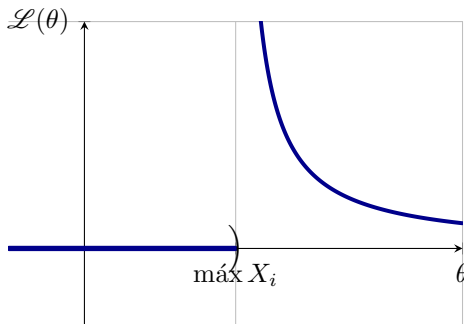
a) Halle  $\hat{\theta}_n$  el estimador de máxima verosimilitud de  $\theta$

$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0, \theta]}(x) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0, \theta]}(x)$

$$\mathbb{1} = \begin{cases} 1 & X_i \leq \theta \\ 0 & cc \end{cases} \tag{1}$$

Que es equivalente

$$\mathbb{1} = \begin{cases} 1 & \text{máx } X_i \leq \theta \\ 0 & cc \end{cases} \tag{2}$$



$$\Rightarrow \hat{\theta}_n = \text{máx } X_i$$

b) Determine si el estimador  $\hat{\theta}_n$  es consistente.  
 Llamo  $Y = \text{máx } X_i$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\text{máx } X_i \leq y) = [F_X(y)]^n$$

$$f_Y(y) = n [F_X(y)]^{n-1} f_X(y)$$

$$f_Y(y) = n \left[ \int_0^y \frac{1}{\theta} dx \right]^{n-1} \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0, \theta]}(y) = n \cdot \frac{y^{n-1}}{\theta^{n-1}} \cdot \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0, \theta]}(y) = n \cdot \frac{y^{n-1}}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0, \theta]}(y)$$

Calculo  $\mathbb{E}(Y)$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot n \cdot \frac{y^{n-1}}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0, \theta]}(y) dy$$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{n}{\theta^n} \int_0^{\theta} y^n dy$$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{\theta^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{\theta^n}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{n\theta}{n+1}$$

Ahora calculo  $\mathbb{E}(Y^2)$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y) dy$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot n \cdot \frac{y^{n-1}}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0, \theta]}(y) dy$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{n}{\theta^n} \int_0^{\theta} y^{n+1} dy$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{\theta^{n+2}}{n+2} \cdot \frac{n}{\theta^n}$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{n\theta^2}{n+2}$$

$\hat{\theta}_n$  es consistente  $\iff ECM \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

$$ECM: \left[ \mathbb{E}(\hat{\theta}_n) - \theta \right]^2 + \mathbb{V}(\hat{\theta}_n) = \left[ \mathbb{E}(\hat{\theta}_n) - \theta \right]^2 + \mathbb{E}(\hat{\theta}_n^2) - \mathbb{E}(\hat{\theta}_n)^2$$

$$\text{ECM: } \left[ \frac{n\theta}{n+1} - \theta \right]^2 + \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n\theta}{n+1} = \left[ \frac{\mathcal{N}\theta}{\mathcal{N}(1+\frac{1}{n})} - \theta \right]^2 + \frac{\mathcal{N}\theta^2}{\mathcal{N}(1+\frac{2}{n})} - \frac{\mathcal{N}\theta}{\mathcal{N}(1+\frac{1}{n})}$$

Efectivamente  $ECM \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$\therefore \hat{\theta}_n$  es consistente.

7. Sean  $X_1, \dots, X_n$  v.a. i.i.d. con  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 4)$ .

Para

$$H_0 = \{\mu = 5\} \quad \text{vs.} \quad H_1 = \{\mu > 5\}$$

se determinó un  $p$ -valor de 0,0606. ¿Rechazo  $H_0$  con un  $\alpha = 0,05$ ? Hallar el promedio muestral sabiendo que  $n = 9$

El  $p$ -valor es el mínimo valor con el que rechazo  $H_0$  y dado que  $0,05 < 0,0606 \Rightarrow$  no rechazo  $H_0$ .

Si  $p\text{-valor} = 0,0606 \xrightarrow{\Phi} z_\alpha = 1,55$

$$\frac{(\bar{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{\sqrt{4}} = 1,55$$

$$\frac{(\bar{X}_9 - 5)\sqrt{9}}{2} = 1,55$$

$$\bar{X}_9 - 5 = \frac{31}{30}$$

$$\bar{X}_9 = \frac{181}{30} \simeq 6,033$$

## Parte B

1. Enuncie y demuestre la Ley de los Grandes Números. Incluya previamente todas las definiciones y conceptos que considere pertinentes.

**Ley de los Grandes Números.** Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias tal que  $\mathbb{E}(X_i) = \mu$  y  $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2 < +\infty$

$$\Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu \equiv P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Demostración. } \mathbb{E}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \mathbb{E}(\sum_{i=1}^n X_i) \stackrel{i.i.d.}{=} \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}} \mathbb{E}(X_i) = \mu$$

$$\mathbb{V}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}(\sum_{i=1}^n X_i) \stackrel{indep}{=} \frac{\mathcal{N}}{n^2} \mathbb{V}(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) = P(|\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)| > \varepsilon) \stackrel{Tchebyshev}{\leq} \frac{\mathbb{V}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0$$

$$0 \stackrel{Axioma}{\leq} P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq 0$$

$\iff$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0$$

□

2. Proponga un ejercicio (escriba el enunciado) cuya resolución requiera invocar la Ley de los Grandes Números. No incluya la resolución del ejercicio.

Ejercicio propuesto: Sean  $X_1, \dots, X_n$  v.a. i.i.d. con función de distribución exponencial de parámetro  $\lambda = 2$ . Indique el valor del siguiente límite en probabilidad:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i < 1\}} = \dots$$