Métodos Numéricos
13 de septiembre de 2019
Primer Parcial

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

☐ Resolver ejercicios en hojas separadas ☐ Completar nombre en las hojas	[redacted]				
☐ Completar LU y nombre en el enunciado ☐ **Justificar <u>todas</u> las respuestas**	Ej. 1 17	Ej. 2 23	Ej. 3 23	Ej. 4 25	Nota 88 A

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz que cumple $A^2 = A$ y sea $r = rg(A)$.
   (a) Probar que cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ se puede escribir como $x = s + t$ con $s \in Nu(A)$ y $t \in Im(A)$. (8 puntos)
   (b) Probar que $Nu(A) \cap Im(A) = \{0\}$. (8 puntos)
   (c) Probar que existe una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $Av_i = v_i$ para todo $i \leq r$ y $Av_i = 0$ para todo $i > r$. (9 puntos)

2. Consideremos realizar la triangulación *hacia arriba* para convertir A en una matriz triangular superior U. Esta triangulación sin pivoteo se realiza por filas mediante combinaciones lineales de columnas. Por ejemplo, para la siguiente matriz A,

$$A = A^{(0)} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

   donde llamamos $A^{(k)}$ a la matriz luego de haber triangulado k filas comenzando desde la última y hacia la primera. Mediante esta triangulación podemos llegar a la factorización $A = UL$, con L triangular inferior y unos en su diagonal.
   (a) Para cualquier matriz A, construir la matriz $\widehat{M_k}$ de forma tal que $A^{(k+1)} = A^{(k)}\widehat{M_k}$. Es decir, $\widehat{M_k}$ pone en cero los valores a la izquierda de la diagonal en la $(n-k)$-ésima fila, para $k = 0, 1, \dots, n-1$. ¿Cuál es la inversa de $\widehat{M_k}$? Justificar. (8 puntos)
   (b) Para la matriz A del ejemplo, hallar la factorización $A = UL$, con L triangular inferior con unos en la diagonal y U triangular superior. (7 puntos)
   (c) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible, con P una matriz de permutación definida como $P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j = n+1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
   Sea $B = PAP$ una matriz para la cual existe la factorización LU tradicional sin pivoteo: $B = LU$. Hallar la factorización UL de A (con unos en la diagonal de L). (10 puntos)

3. (a) Sean las matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar que A es definida positiva y B es no singular si y sólo si BAB^t es definida positiva. (13 puntos)
   (b) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz definida positiva y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida como $b_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ii}a_{jj}}}$.
   Probar que B es definida positiva. ¿Cuánto vale $traza(B)$? (12 puntos)

4. (a) Sea $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una reflexión de Householder. Probar que $H^2 = I$. (5 puntos)
   (b) Probar que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es una reflexión de Householder. (8 puntos)
   (c) Probar que toda matriz ortogonal $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se puede escribir como producto de a lo sumo n matrices de Householder. (12 puntos)
   Sug.: Según un ejercicio de la práctica, si una matriz es ortogonal y triangular superior, entonces sus columnas son de la forma $\pm e_j$ donde e_j es un vector de la base canónica.

[redacted] H: 1

ord:

1) b) Sup $Nu(A) \cap Im(A) \neq \{0\}$

Entonces $\exists\, x \neq 0 \;/\; \begin{cases} x \in Nu(A) \\ x \in Im(A) \iff \exists\, \underset{\text{pues } x\neq 0}{v \neq 0} \;/\; Av = x \end{cases}$

Pero $Av = AAv = Ax = 0$ ABS!

y $Av = x \neq 0$

Luego, la intersección es trivial. ✓

c) Dado un $x \in \mathbb{R}^n$ cualquiera que no esté e el núcleo de A

$\Rightarrow \exists\, y \in Im(A) \;/\; Ax = y.$

Pero $Ax \overset{A^2=A}{=} AAx = Ay$

$\iff Ax = Ay$

$\iff x = y$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \;/\; x \notin Nu(A)$, $x \in Im(A)$. y viceversa. ✓

Por teo de dimensión $n = \dim(Nu(A)) + \underbrace{\dim(Im(A))}_{r}$. r = cantidad de cols li de A.

$\Rightarrow Im(A) = \{v_1, \dots, v_r\}$ generadores li de $Im(A)$

$Nu(A) = \{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ " " de $Nu(A)$ $= n - r$

Sea $\underset{\text{Notar superposición por b)}}{B} = \underline{Im(A) \cup Nu(A)} = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ ✓

$\begin{cases} Av_i = v_i & \text{si } i \leq r \\ Av_i = 0 & \text{si } i > r \end{cases}$

[redacted] H: 2
ord:

2) a) Veamos el caso de $\hat{M}_1$ para la matriz de ejemplo.

Basándonos en las M de LU, las definiremos adecuadamente.

Para obtener $A^{(1)}$ en el ejemplo debemos hacer

$$\underset{A^{(0)}}{\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\hat{M}_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \boxed{-1} & \boxed{-1} & 1 \end{pmatrix}} = A^{(1)} \rightarrow \left[A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

→ a la columna 1 le resto un múltiplo de la 3ra columna

→ a la columna 2 le resto un múltiplo de la 3ra

donde −1 y −1 marcados en gris son los multiplicadores (ya con signo negativo) para triangular la columna deseada.

El concepto es el mismo que de LU solo que visto por columnas

"A la columna 2 le resto la columna 1"

"A la columna 1 le resto la columna 1".

"La columna 3 queda como está pues ya está triangulada."

Definimos $\hat{M}_1 = I - e_3 m_1^t$ donde $m_1^t = (1, 1, 0)$. matriz de multiplicadores.

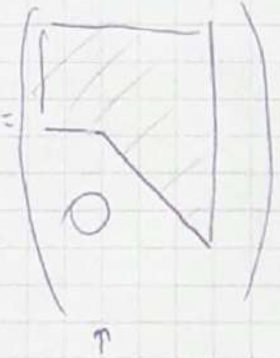
¿¿cómo se escriben estos multiplicadores en función de los valores a_{ij} para cualquier $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$??

Luego para $\hat{M}_2$ será similar pero tendrá esta forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ es decir $\hat{M}_2 = I - e_2 m_2^t$ donde $m_2^t (*, 0, 0)$

En general, para una matriz triangulada k−1 veces

$A^{(k-1)} =$



k−1

(*) Nota sobre índice k!

definimos $\hat{M}_k = I - e_{n-k+1} m_k^t$

donde $m_k = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \} \; n-k \text{ multiplicadores} \\ \} \; k \end{matrix}$

Así $A^{(k)} = A^{(k-1)} \hat{M}_k$

(ups, creo que usé los índices distintos al enunciado por eso me quedó el +1 en e_{n-k+1} pero la idea es la misma)

Notar que sigue valiendo que $\hat{M}_k^{-1} = I \boxed{\pm} e_{n-k+1} m_k^t$.

~~luego~~ $A^{(0)}$

Notar también que $\hat{M}_k$ es ti pues es

$$\begin{array}{r} \\ k \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ * & * \; * & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \hat{M}_k$$

Finalmente obtenemos

$$A^{(0)} \hat{M}_1 \dots \hat{M}_{n-1} = U$$

$$A^{(0)} = U \underbrace{M_{n-1}^{-1} \dots M_1^{-1}}_{L}$$

inversa de ti es ti

producto de ti es ti

b) $\underset{A^{(0)}}{\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\hat{M}_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{A^{(1)}}{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

$A^{(1)} \underset{\hat{M}_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U$

$$A^{(0)} \hat{M}_1 \hat{M}_2 = U$$

$$A^{(0)} = U \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = U \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{L} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[redacted]

H: 3
ord.

c) $P = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \therefore & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$, A inversible

$B = PAP$.

Sea LU fact. LU de B / $B = LU$

$\iff PAP = LU$

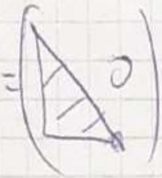
Observación: P es ortogonal por ser de permutación.
Además $P^t = P \Rightarrow P^2 = I$.

$PAP = LU$

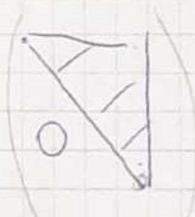
$\iff A \underset{P^t = P}{=} PLUP$

Veamos (2) formas...

$U =$  $\Rightarrow UP =$ 

$PUP =$  triangular inferior.

Veamos con L

$L =$ , $PL =$ , $PLP =$  triangular superior

$A = PLUP$

$= \underbrace{PLP}_{\substack{ts \\ \tilde{U}}} \overbrace{I}^{} \underbrace{PUP}_{\substack{ti \\ \tilde{L}}} \implies A = \tilde{U} \cdot \tilde{L}$

El problema es que $\underbrace{PUP}_{\tilde{L}}$ no necesariamente tiene 1s en diagonal.

Pero como A inversible $\Rightarrow \tilde{L}_{ii} \neq 0 \quad \forall i$.

Sea $D = \frac{1}{\tilde{L}_{ii}}$ matriz diagonal $\Rightarrow D^{-1} = \tilde{L}_{ii}$ diagonal también

abuso de notación

$\Rightarrow A = \underbrace{\tilde{U} D^{-1}}_{U} \underbrace{D \tilde{L}}_{L}$ con 1s en diag

3A	3B
11	12

[redacted]

H: 4
Ord:

3) a) Este ejercicio lo vi por el final de la practica 3 y por suerte lo hice (espero que bien).

$\Rightarrow$) A es dp, B inversible

qvq $\forall x \neq 0$ $x^t B A B^t x > 0$.

B es inversible $\Leftrightarrow B B^{-1} = I$

$\Leftrightarrow (B B^{-1})^t = I^t = I$

$\Leftrightarrow B^{-1^t} B^t = I$

$\Leftrightarrow B^{t^{-1}} B^t = I \quad \Leftrightarrow B^t$ es inversible

$\Rightarrow \forall x \neq 0$ $B^t x$ tiene solución unica y además $B^t x = y \neq 0$

Retomando $\underbrace{x^t B}_{(B^t x)^t = y^t} A \underbrace{B^t x}_{y} = y^t A y \underset{\text{Asd.}}{\overset{y \neq 0}{>}} 0 \quad \forall x \neq 0.$

$\Leftarrow$) Sabemos que $\forall x \neq 0$. $x^t B A B^t x > 0$.

$x^t B A B^t x = (B^t x)^t A (B^t x) \neq 0$ pues es mayor por hipótesis

$\Rightarrow$ no puede pasar que $B^t x = 0$ $\forall x \neq 0$ $\Leftrightarrow B^t$ es inversible.

$\Rightarrow$ B inversible por razonamiento de arriba.

$\Rightarrow B^t x = y$ e $y \neq 0$ por ser $x \neq 0$ y B^t inversible.

Como B^t es inv $\Rightarrow Im(B^t) = \mathbb{R}^n \Rightarrow \exists x / B^t x = y$

Entonces $(B^t x)^t A B^t x > 0$

$\Leftrightarrow y^t A y > 0 \Leftrightarrow \boxed{A \text{ es dp}}$

$\forall y \neq 0$

$\boxtimes$

b) 1° observación: A es dp $\Rightarrow a_{ii} > 0 \ \forall i$. La división en b_{ij} está bien definida.

Supongo que pusieron el item a) por algo... ;)

Consideremos este caso general

$$\begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 a_{11} & \cdots & b_1 a_{1n} \\ b_2 a_{21} & \cdots & b_2 a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_n a_{n1} & \cdots & b_n a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^2 a_{11} & b_1 b_2 a_{12} & \cdots & b_1 b_n a_{1n} \\ b_2 b_1 a_{21} & b_2^2 a_{22} & \cdots & b_2 b_n a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_n b_1 a_{n1} & \cdots & \cdots & b_n^2 a_{nn} \end{pmatrix}$$

Justo lo que queremos (parece galerazo pero lo probé bastante en un borrador

Sea $B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{a_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\sqrt{a_{nn}} \end{pmatrix}$ diagonal. B es inversible pues $a_{ii} > 0$
$\Rightarrow \sqrt{a_{ii}} > 0 \neq 0$.

$B^t = B$.

$(BAB^t)_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ii} a_{jj}}}$ y por a) sabemos que es dp.

sin modulo pues $\sqrt{a_{ii}}$ debe estar definido.

$$tr(BAB^t) = \sum_{i=1}^{n} (BAB^t)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ii}}{a_{ii}} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

[redacted] H: 5
ord:

4) a) Podemos verlo de dos formas distintas y ver que vale.

1) H es una matriz de Householder. Sabemos que son simétricas y ortogonales. $\Rightarrow \begin{cases} H = H^t \\ HH^t = I \end{cases} \Rightarrow HH^t = HH = H^2 = I$

2) Haciendo la cuentita para una H cualquiera.

$$H = I - \frac{2uu^t}{\|u\|_2^2}, \quad u \in \mathbb{R}^n$$

$$H^2 = \left(I - \frac{2uu^t}{\|u\|_2^2}\right)\left(I - \frac{2uu^t}{\|u\|_2^2}\right) = I^2 - 2\left(\frac{2uu^t}{\|u\|_2^2}\right) + \frac{4 u\overbrace{u^t u}^{\|u\|_2^2} u^t}{\cancel{\|u\|_2^2}\,\|u\|_2^2}$$

$$= I - \frac{4uu^t}{\|u\|_2^2} + \frac{4uu^t}{\|u\|_2^2} = I.$$

B

b) Para probar que esa matriz es reflexión de Householder, hallaremos un vector $u \in \mathbb{R}^n$ / $H = I - \frac{2uu^t}{\|u\|_2^2} = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right) = A$

La Identidad ya la tenemos solo necesitamos que el elemento A_{nn} se convierta en -1. También tenemos un -2 en la H que nos va a ayudar. En uu^t todas las filas y columnas menos el último elemento debe ser 0.

Sea $u = \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\}n-1$, $\|u\|_2 = 1$

$$2uu^t = 2\begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & — & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & — & 0 \\ | & 0 & | \\ 0 & — & 0\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $H = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \; 2 \end{pmatrix} = A$ como queríamos.

(B)

A es reflexión de Householder.

c) La estrategia será escribir la triangulación de Householder para A ya conocida.

En general luego de n pasos de triangulación tendríamos $\underbrace{H^{(n)} \ldots H^{(1)}}_{M?} A = R$

Pero buscaré ver que R en realidad es la identidad.

$$A = \left(c_1 \mid \ldots \mid c_n \right)$$ Como queremos triangular

construimos $H^{(1)} \mid H^{(1)} c_1 = \begin{pmatrix} \|c_1\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ pero como A es ortogonal $\Rightarrow H_1 c_1 = e_1$

cjto ortonormal de columnas.

para eso $u = \dfrac{c_1 - e_1}{\|c_1 - e_1\|_2}$) ¿Si $c_1 = e_1$?

$H^{(1)} A$ manda la primer columna a donde queremos y el resto en principio no sabemos.

Pero como $H^{(1)} A$ es producto de ortogonales el resultado es ortogonal $\Rightarrow F_1 \left(H^{(1)} A \right) = e_1^t$.

filas cjto ortonormal.

$$H^{(1)} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A^{(1)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$\in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$

Tomamos la submatriz $A^{(1)}$ y con el mismo razonamiento construimos $\tilde{H}^{(2)} \mid \tilde{H}^{(2)} A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A^{(2)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

Luego $H^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \tilde{H}^{(2)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \Rightarrow H^{(2)} H^{(1)} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A^{(2)} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$

Así siguiendo, luego de n pasos tendremos

$$H^{(n)} \ldots H^{(2)} H^{(1)} A = I$$

$$\Leftrightarrow \quad A = H^{t(1)} \ldots H^{t(n)}$$

$$\Leftrightarrow \quad A = H^{(1)} \ldots H^{(n)}$$ por ser H simétrica.

Luego A es producto de a lo sumo (tal vez quedaba la identidad antes) del prod de n matrices de Householder ✓

(B)