FINAL DE ÁLGEBRA I
(25-10-22)

N. I.
(nibanez123@gmail.com)

"...hacia donde el crepúsculo corre borrando estatuas."
Pablo Neruda

Ejercicio 1

Sea $X = \{1, 2, ..., 13\}$. En $P(X)$ se define la relación:

$$A \,\Re\, B \iff \text{ existen } a \in A \text{ y } b \in B \text{ tales que } a \mid b.$$

(a) Decidir si la relación $\Re$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

(b) ¿Cuántos conjuntos $B \in P(X)$ satisfacen que $\{2, 3\} \,\Re\, B$?

Resolución:

(a) • $\Re$ no reflexiva: si $A = \varnothing$ entonces $A \not\Re A$, pues no existen $a, b \in A$ tales que $a \mid b$, ya que en A no hay ningún elemento.

• $\Re$ no simétrica: si $A = \{1\}$ y $B = \{2\}$ se tiene que $A \,\Re\, B$ pues $1 \mid 2$, pero $B \not\Re A$ pues $2 \nmid 1$.

• $\Re$ no antisimétrica: si $A = \{1, 4\}$ y $B = \{2\}$ se tiene que $A \,\Re\, B$ pues $1 \mid 2$ y $B \,\Re\, A$ pues $2 \mid 4$, pero $A \neq B$.

• $\Re$ no transitiva: si $A = \{2\}$, $B = \{2, 3\}$ y $C = \{3\}$ se tiene que $A \,\Re\, B$ pues $2 \mid 2$ y $B \,\Re\, C$ pues $3 \mid 3$, pero $A \not\Re C$ pues $2 \nmid 3$.

(b) Notar que

$$\{2,3\} \,\Re\, B \iff \text{ existe } b \in B \text{ tal que } 2 \mid b \;\text{ o }\; 3 \mid b.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \{2,3\} \,\not\Re\, B &\iff \text{ para todo } b \in B,\; 2 \nmid b \;\text{ y }\; 3 \nmid b \\ &\iff B \subseteq \{1,5,7,11,13\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la cantidad de conjuntos $B \in P(X)$ tales que $\{2,3\} \,\Re\, B$ es $2^{13} - 2^5 = 8192 - 32 = 8160$.

■

Ejercicio 2

Para $n \in \mathbb{N}$, sean

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad b_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k}.$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n \leq 3a_n.$$

Resolución:

Usamos inducción. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, la afirmación dada por

$$P(n) : b_n \leq 3a_n.$$

Veamos que vale $P(n)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 1$ resulta $b_1 = 1 \leq 3 = 3 \cdot 1 = 3a_1$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos verdadera $P(n)$ y veamos que lo es $P(n+1)$. La afirmación $P(n+1)$ es verdadera si y sólo si $\sum_{k=1}^{(n+1)^2} \frac{1}{k} \leq 3 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$.

Tenemos que

$$\sum_{k=1}^{(n+1)^2} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k} + \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} \frac{1}{k} \leq 3 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} \frac{1}{k}$$

por H. I., y por lo tanto basta ver que

$$\sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} \frac{1}{k} \leq 3\frac{1}{n+1}$$

, pues $3\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 3\frac{1}{n+1} = 3a_{n+1}$.

En $\sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} \frac{1}{k}$ tenemos $2n+1$ términos, cada uno de ellos menor o igual al primero, es decir, a $\frac{1}{n^2+1}$. Entonces,

$$\sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} \frac{1}{k} \leq (2n+1)\frac{1}{n^2+1} = \frac{2n+1}{n^2+1}.$$

Luego,

$$\frac{2n+1}{n^2+1} \leq 3\frac{1}{n+1} \iff 2n^2+3n+1 \leq 3n^2+3 \iff 3n \leq n^2+2,$$

que vale para todo $n \geq 2$.

Resta ver entonces el caso $n = 1$. Tenemos que

$$\sum_{k=1^2+1}^{(1+1)^2} \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{4} \frac{1}{k} = \frac{13}{12} \leq \frac{3}{2} = 3\frac{1}{1+1}.$$

Probados el caso base y el paso inductivo, se concluye que $P(n)$ es verdadera $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

$\blacksquare$

Ejercicio 3

Hallar todos los pares $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tales que $(a : b) = 1$ y

$$\frac{a}{b} + \frac{6b}{7} + \frac{7}{a} \in \mathbb{Z}.$$

Resolución:

Tenemos que

$$\frac{a}{b}+\frac{6b}{7}+\frac{7}{a}\in\mathbb{Z} \iff 7ab \mid 7a^2+6ab^2+49b.$$

Luego, si $7ab \mid 7a^2+6ab^2+49b$ entonces $7 \mid 7a^2+6ab^2+49b$, $a \mid 7a^2+6ab^2+49b$ y $b \mid 7a^2+6ab^2+49b$.

En primer lugar,

$$7 \mid 7a^2+6ab^2+49b \;\Leftrightarrow\; 7 \mid 6ab^2 \;\Leftrightarrow\; 7 \mid ab^2 \;\Leftrightarrow\; 7 \mid a \text{ o } 7 \mid b,$$

donde la primer equivalencia vale pues $7 \mid 7a^2+49b$, la segunda pues $(6:7)=1$ y la tercera pues 7 es primo.

En segundo lugar,

$$a \mid 7a^2+6ab^2+49b \;\Leftrightarrow\; a \mid 49b \;\Leftrightarrow\; a \mid 49,$$

donde la primer equivalencia vale pues $a \mid 7a^2+6ab^2$ y la segunda pues $(a:b)=1$.

En tercer lugar,

$$b \mid 7a^2+6ab^2+49b \;\Leftrightarrow\; b \mid 7a^2 \;\Leftrightarrow\; b \mid 7,$$

donde la primer equivalencia vale pues $b \mid 6ab^2+49b$ y la segunda pues $(a:b)=1$.

Entonces, $7ab \mid 7a^2+6ab^2+49b$ implica $7 \mid a$ o $7 \mid b$, $a \mid 49$ y $b \mid 7$, y por lo tanto tenemos que hallar todos los pares $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ con $(a:b)=1$ para los cuales valen esas tres condiciones (y después probar si para cada uno de ellos resulta $7ab \mid 7a^2+6ab^2+49b$, pues las tres condiciones son necesarias, pero no sabemos si suficientes, pues las obtuvimos a partir de una implicación y no de una equivalencia).

Los pares $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ con $(a:b)=1$ tales que $7 \mid a$, a $\mid 49$ y $b \mid 7$ son $(7,1)$ y $(49,1)$.

El único par $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ con $(a:b)=1$ tal que $7 \mid b$, $a \mid 49$ y $b \mid 7$ es $(1,7)$.

Luego:

- $(a,b)=(7,1)$:

$$7ab \mid 7a^2+6ab^2+49b \iff 49 \mid 434,$$

que no vale.

- $(a,b)=(49,1)$:

$$7ab \mid 7a^2+6ab^2+49b \Longleftrightarrow 343 \mid 17150,$$

que vale.

- $(a,b)=(1,7)$:

$$7ab \mid 7a^2+6ab^2+49b \Longleftrightarrow 49 \mid 644,$$

que no vale.

Concluimos entonces que el único par $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ con $(a:b)=1$ tal que $7ab \mid 7a^2+6ab^2+49b$ es $(49,1)$.

$\blacksquare$

Ejercicio 4

Hallar el resto en la división por 55 del número

$$\sum_{k=1}^{1000} k^{20}.$$

Resolución:

Sea $S=\sum_{k=1}^{1000} k^{20}$. Como $(5:11)=1$, resulta

$$S\equiv r \pmod{55} \Leftrightarrow S\equiv r \pmod 5 \ \text{ y } \ S\equiv r \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow r_5(S)\equiv r \pmod 5 \ \text{ y } \ r_{11}(S)\equiv r \pmod{11},$$

donde $r=r_{55}(S)$.

Calculamos $r_5(S)$. Tenemos que

$$S=\sum_{j=0}^{4}\sum_{\substack{k=1\\ r_5(k)=j}}^{1000} k^{20}\equiv \sum_{j=0}^{4}\sum_{\substack{k=1\\ r_5(k)=j}}^{1000} j^{20} \pmod 5.$$

Luego,

$$\sum_{j=0}^{4} \sum_{\substack{k=1 \\ r_5(k)=j}}^{1000} j^{20} = \sum_{j=1}^{4} \sum_{\substack{k=1 \\ r_5(k)=j}}^{1000} j^{20} = \sum_{j=1}^{4} 199 \cdot j^{20} = 199 \sum_{j=1}^{4} j^{20}$$

pues, para cada $1 \leq j \leq 4$, hay 199 números entre 1 y 1000 con resto j en la división por 5 ($996 = 199 \cdot 5 + 1$, $997 = 199 \cdot 5 + 2$, $998 = 199 \cdot 5 + 3$ y $999 = 199 \cdot 5 + 4$). Entonces,

$$S \equiv 199 \sum_{j=1}^{4} j^{20} \equiv 4 \sum_{j=1}^{4} j^{r_4(20)} \equiv 4 \sum_{j=1}^{4} j^{0} \equiv 4 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{5}$$

por el P. T. F.

Ahora calculamos $r_{11}(S)$, procediendo como antes. Tenemos que

$$S = \sum_{j=0}^{10} \sum_{\substack{k=1 \\ r_{11}(k)=j}}^{1000} k^{20} \equiv \sum_{j=0}^{10} \sum_{\substack{k=1 \\ r_{11}(k)=j}}^{1000} j^{20} \pmod{11}.$$

Luego,

$$\sum_{j=0}^{10} \sum_{\substack{k=1 \\ r_{11}(k)=j}}^{1000} j^{20} = \sum_{j=1}^{10} \sum_{\substack{k=1 \\ r_{11}(k)=j}}^{1000} j^{20} = \sum_{j=1}^{10} 90 \cdot j^{20} = 90 \sum_{j=1}^{10} j^{20}$$

pues, para cada $1 \leq j \leq 10$, hay 90 números entre 1 y 1000 con resto j en la división por 11 ($991 = 90 \cdot 11 + 1$,..., $1000 = 90 \cdot 11 + 10$). Entonces,

$$S \equiv 90 \sum_{j=1}^{10} j^{20} \equiv 2 \sum_{j=1}^{10} j^{r_{10}(20)} \equiv 2 \sum_{j=1}^{10} j^{0} \equiv 2 \cdot 10 \equiv 9 \pmod{11}$$

por el P. T. F.

Finalmente,

$$S \equiv r \pmod{55} \;\Leftrightarrow\; 1 \equiv r \pmod{5} \;\text{ y }\; 9 \equiv r \pmod{11},$$

y por lo tanto $r = 31$.

Se concluye así que $r_{55}(\sum_{k=1}^{1000} k^{20}) = 31$.

$\blacksquare$