01

1. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

   (a) Probar que $\mathbb{R}^n = Im(A) + Nu(B) \iff Im(BA) = Im(B)$. (15 puntos)
   (*Sug.* para la vuelta: si $x \in \mathbb{R}^n$ analizar Bx.)

   (b) Para un n genérico, encontrar matrices A y B distintas, con $rg(A) = 1$ y $dim(Nu(B)) = n-1$ que cumplan $\mathbb{R}^n = Im(A) + Nu(B)$ y para esas matrices calcular $Im(A) \cap Nu(B)$. (10 puntos)

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz inversible.

   (a) Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & c^t \\ b & A \end{pmatrix}$ con $b, c \in \mathbb{R}^n$.

      i. Si $c = 0$, probar que B tiene factorización LU si y sólo si A tiene factorización LU. (8 puntos)

      ii. Si $c \neq 0$, mostrar que la afirmación del ítem anterior no es verdadera, exhibiendo un contraejemplo para ciertos b, c y A inversible. Justificar. (7 puntos)

   (b) Siendo $d = 1/(2\|A^{-1}\|)$ y $\|\cdot\|$ una norma matricial inducida, probar que para cualquier matriz $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, si $\|E\| \leq d$ entonces $A + E$ es inversible. (10 puntos)

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, n \geq 5$, una matriz simétrica definida positiva. Sean z y w la segunda y cuarta columna de la matriz A. Definimos $\widehat{A} \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ a la matriz que se obtiene de A luego de eliminar las columnas z y w, y de eliminar las filas z^t y w^t.

   (a) Probar que $\widehat{A}$ es simétrica definida positiva. (10 puntos)

   (b) Siendo d un real positivo, probar que si $\|z\|_2^2 < d$ entonces la matriz $\begin{pmatrix} AA^t & Az \\ z^tA^t & d \end{pmatrix}$ es simétrica definida positiva. (15 puntos)

4. Sea $Q = (q_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal. Llamamos $cl_1(Q), \ldots, cl_n(Q)$ a las columnas de Q. Si $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, definimos $u = \sum_{j=1}^n e_j$ y $v = \sum_{j=1}^n cl_j(Q)$.

   (a) Demostrar que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{i,j} = u^t v$. (6 puntos)

   (b) Deducir que $|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{i,j}| \leq n$ y que se alcanza la igualdad para alguna matriz Q. (7 puntos)

   (c) Probar que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |q_{i,j}| \leq n^{3/2}$. (6 puntos)

   (d) Probar que $\forall x \in \mathbb{R}^n : ||x||_1 \geq ||x||_2$ y deducir que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |q_{i,j}| \geq n$. (6 puntos)

① a) $\Rightarrow$) Queremos ver que

$Im(BA) = Im(B)$. Para ello vemos la doble inclusión:

$\subseteq$) Si $x \in Im(BA) \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^n$ tal que $BAy = x$. $\Rightarrow x = B\cdot(Ay) \Rightarrow x \in Im\,B$

$\supseteq$) Sea $Bx \in Im\,B$, sabemos por hipótesis que $\exists y \in Im\,A, \exists z \in Nu\,B$ tal que

$x = Ay + z$. Entonces:

$$Bx = B(Ay+z) = BAy + \underbrace{Bz}_{0 \text{ pues } z\in Nu B} = (BA)y \Rightarrow Bx \in Im(BA)$$ como queríamos.

$\Leftarrow$) Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Queremos hallar $y \in Im\,A$, $z \in Nu\,B$ tal que $x = y+z$. Consideramos $Bx \in Im\,B$. Por hipótesis, existe un $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $Bx = BAv \Rightarrow B(x-Av) = 0$

$\Rightarrow x - Av \in Nu\,B$

Tomamos $z = x - Av. \in Nu B$

Entonces $$x = \underbrace{Av}_{y \in Im A} + \underbrace{(x-Av)}_{z \in Nu\, B}$$ como queríamos.

b) Voy a utilizar la condición probada en a). Basta ver que $Im(BA) = Im\,B$ para garantizar que $\mathbb{R}^n = Im\,A + Nu\,B$.

Voy a intentar hallar A y B que verifiquen $BA = B$ en cuyo caso es inmediato que $Im\,BA = Im\,B$.

Como quiero que dim Nu B = n-1, voy a intentar con $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} = e_1 \cdot e_1^t$

Para elegir A, si tomara B=A, se cumpliría que BA=A, pero necesito $A \neq B$. Puedo entonces repitiendo una fila (no cambia el rango)

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Así:

$$B\cdot A = \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix} = B \quad \text{como queríamos.}$$

Además $rg\,A = rg_c\,A = \dim(\langle (1\,1\,0 \ldots 0), 0, 0, \ldots 0\rangle)$
$= \dim(\langle (1\,1\,0 \ldots 0)\rangle) = 1$

$rg\,B = \dim(\langle e_1 \rangle) = 1 \Rightarrow \dim(Nu\,B) = n-1$ (teorema de la dimensión)

Luego, A y B satisfacen lo pedido.

Además, notemos que $\underbrace{\langle e_2, e_3, \ldots, e_n\rangle}_{\dim = n-1} \subseteq \underbrace{Nu\,B}_{\dim\, n-1}$

$\Rightarrow$ deben ser iguales $\Rightarrow \boxed{Nu\,B = \langle e_2, \ldots, e_n\rangle}$

$Im\,A = \langle col_1 A, \ldots, col_n A\rangle = \boxed{\langle e_1 + e_2\rangle}$

$\underline{\{0\} = Nu\,B \cap Im\,A}$ Queremos ver que si $\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son tales que: $\beta(e_1+e_2) = \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$

entonces $\beta = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Pero:

$\beta(e_1+e_2) = \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n \Leftrightarrow 0 = -\beta e_1 + (\alpha_2 - \beta) e_2 + \alpha_3 e_3 + \cdots + \alpha_n e_n$

$\Leftrightarrow \beta = 0 \quad \alpha_2 - \beta = 0 \quad \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ es LI $\qquad \alpha_2 = \beta = 0$

Luego $Nu\,B \cap Im\,A = \{0\}$ (también se podría haber hecho con el teorema de la dimensión para la suma)

$\Leftarrow$) Si $A = L \cdot U$ veamos como hallar la factorización de $B = \tilde{L}\tilde{U}$

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline x & C \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} y & z^t \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

pongo 1 porque $\tilde{L}$ debe tener unos en la diagonal.

Haciendo la multiplicación por bloques se obtiene: $\boxed{y = 1}$

$z^t = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0}$

$\underbrace{x y}_{1} = b \Rightarrow \boxed{x = b}$

$\underbrace{\cancel{x z^t}}_{0} + CD = A \rightarrow$ tomo $\boxed{\begin{array}{l} C = L \\ D = U \end{array}}$

podrías tomar otros?

$$\Rightarrow \quad B = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & L \end{array}\right)}_{\tilde{L}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U \end{array}\right)}_{\tilde{U}}$$

luego B tiene LU.

(tiene unos en la diagonal pues L tiene unos en la diagonal).

$\tilde{L}$ es triangular inferior gracias a que L lo es

$\tilde{U}$ es triangular superior gracias a que U lo es

$\Rightarrow$) Ahora asumimos que B tiene LU, es decir, $B = \tilde{L} \cdot \tilde{U}$ con $\tilde{L}$ triangular inferior con unos en la diagonal y $\tilde{U}$ triangular superior. Entonces, escribiendo en bloques, hay L triang. inferior y U triangular superior tales que:

$$B = \tilde{L} \cdot \tilde{U} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline x & L \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} y & z^t \\ \hline 0 & U \end{array}\right)}_{\text{sabemos que existe pues } B \text{ tiene } LU}$$

Nuevamente planteando el ~~sistema~~ resultante por bloques:

$y = 1$

$z = 0$

$x = b$

$\Rightarrow L \cdot U = A \Rightarrow \boxed{A = L\,U}$

Y como L es triang inferior con unos en la diagonal y U es triangular superior $\Rightarrow A$ tiene LU.

ii) Voy a utilizar para hallar el ejemplo el criterio visto en la teórica:

Si A es inversible, A tiene $LU \Leftrightarrow$ todas sus submatrices principales son no singulares.

Quiero B tq sus submatrices principales sean inversibles, pero que A no lo cumpla.

Tomando $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det A = -1 \Rightarrow$ inversible.

Pero no tiene LU porque tiene el menor $\boxed{0}$ con $\det = 0$.

$$B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & \hat{a} & \hat{b} \\ \hline \hat{c} & 0 & 1 \\ \hat{d} & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Quiero que $1 \neq 0$ ✓

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \hat{a} \\ \hat{c} & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 - \hat{a}\hat{c} = -\hat{a}\hat{c} \neq 0$$

$$\det B = \hat{b}\hat{c} + \hat{a}\hat{d} - 1 \neq 0$$

Tomo $\hat{a} = \hat{b} = \hat{c} = \hat{d} = 1$

$$B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\det(\boxed{1}) = 1 \neq 0$

$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$

$\det B = 1 \neq 0 \Rightarrow B$ es inversible.

Luego B tiene LU, por el criterio, pero A no tiene LU.

(b) Notemos que

$$A+E = \underbrace{A}_{\text{inversible}}\,(I+A^{-1}E)$$

Basta ver entonces que $I+A^{-1}E$ es inversible.

Notemos que $\|A^{-1}E\| \underset{\text{norma inducida es submultiplicativa}}{\le} \|A^{-1}\|\cdot\|E\| \le \|A^{-1}\| \dfrac{1}{2\|A^{-1}\|} = 1/2 < 1$

Veamos que vale:

Lema Sea $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\|B\|<1$ $\Rightarrow$ ~~B es inversible~~ $I+B$ es inversible

Demo Veamos que $Ker(I+B)=\{0\}$, luego $I+B$ es inyectiva. Pero por el teo de las dimensiones $\dim Im(I+B) = n - \underbrace{\dim Ker(I+B)}_{0} = n$

luego B también sería sobreyectiva (como transformación lineal) luego $I+B$ sería inversible.

Sea $x \in Ker(I+B) \Rightarrow (I+B)x=0 \Rightarrow x+Bx=0$

$\Rightarrow Bx=-x \Rightarrow \|Bx\|=\|x\|$

Pero $\|Bx\| \le \|B\|\cdot\|x\|$ y si fuese $x\neq 0$

$\Rightarrow \|Bx\| \le \|B\|\cdot\|x\| \underset{\|B\|<1}{<} \|x\|$ Absurdo!

Luego $x=0 \Rightarrow I+B$ tiene $Ker=\{0\}$

$\Rightarrow$ es inversible.

Para terminar tomamos $B=A^{-1}E$, $\|B\|\le 1/2<1$ y usamos el lema.

③ b) En primer lugar, notemos que como

A es sdp $\Rightarrow$ A es inversible $\Rightarrow$ AA^t es sdp.

(pues si $x \neq 0 \Rightarrow$ como A^t es inversible por serlo A

$A^t x \neq 0 \Rightarrow \quad x^t A A^t x = (A^t x)^t (A^t x)$
$= \|A^t x\|_2^2 > 0$
$\uparrow$
$A^t x \neq 0$)

Luego, $A \cdot A^t$ satisface que todos los determinantes de sus submatrices principales son positivos (A sdp $\Rightarrow A = LL^t$ Cholesky $\Rightarrow \det(A) = \det(L)\det(L^t) = \det(L)^2 > 0$ y las submatrices ppales de A también son sdp $\Rightarrow$ su det también es >0).

Por el criterio de lo que basta ver que el determinante de cada submatriz principal es >0. Como para $A \cdot A^t$ ya es cierto, falta sólo ver que el det de toda la matriz es >0.

Pero si "triangulamos" por bloques vemos que:

triangular inferior, $\det = 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$

$$\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \alpha^t & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} AA^t & Az \\ \hline z^t A^t & d \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AA^t & Az \\ \hline 0 & x \end{array}\right)$$

quiero que quede 0

tomo $\alpha = -(A^t)^{-1} z$.

Así:

$$\alpha^t AA^t + z^t A^t = - z^t A^{-1} A A^t + z^t A^t = 0$$

y $x = \alpha^t A z + d = - z^t A^{-1} A z + d = -\|z\|_2^2 + d$

El determinante del producto es $1 \cdot \det \left(\begin{array}{c|c} AA^t & Az \\ \hline z^t A^t & d \end{array}\right)$

Pero del segundo término el determinante es:

$$\det(AA^t)\cdot x = \underbrace{\det(AA^t)}_{\substack{>0 \text{ pues} \\ AA^t \text{ es SDP}}} \cdot \underbrace{(d-\|z\|_2^2)}_{\substack{>0 \\ \text{por enunciado}}}$$

Luego $\det\left(\begin{array}{c|c} AA^t & Az \\ \hline z^tA^t & d \end{array}\right) > 0$ como queríamos,

luego es sdp.

Escaneado con CamScanner

a) Demuestro que en general, si A es SDP y B consiste en A luego de eliminar la fila i y la columna i $\Rightarrow$ B es SDP.
Aplicamos este resultado dos veces seguidas, una para $i=2$ y otra para $i=4$, se obtiene que $\hat{A}$ es SDP.

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \text{fil } i \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \overbrace{\qquad}^{i-1} \quad \overset{col_i}{\downarrow} \; \overbrace{\quad}^{n-i} \\ \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{12}^t & A_{22} \end{array}\right) \end{array}$$

$$B = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{12}^t & A_{22} \end{array}\right)$$

B es simétrica, pues como A es simétrica, $A_{11}^t = A_{11}$ y $A_{22}^t = A_{22}$.

Sea $x = \begin{pmatrix} a \\ \hline b \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}\, i-1 \\ \}\, n-i \end{array}$ un vector de $\mathbb{R}^{n-1}$ no nulo.

$$x^t B \cdot x = \begin{pmatrix} a^t & b^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^t & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^t & b^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} a + A_{12} b \\ A_{12}^t a + A_{22} b \end{pmatrix}$$

$$= a^t A_{11} a + a^t A_{12} b + b^t A_{12}^t a + b^t A_{22} b$$

Veamos que que es >0 si $x \neq 0$.

Tomemos $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ $\quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} a \\ \boxed{0} \\ b \end{pmatrix}$ ← i-ésima posición.

Luego $x \neq 0 \Rightarrow \tilde{x} \neq 0$

$$\tilde{x}^t \cdot A \cdot \tilde{x} = \begin{pmatrix} a^t & 0 & b^t \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & u & A_{12} \\ \hline u^t & a_{ii} & v^t \\ \hline A_{12}^t & v & A_{22} \end{array}\right) \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & & A_{12} \\ & & u \\ \hline A_{12}^t & u & A_{22} \end{array}\right) \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{12} \\ u \end{pmatrix} b \\ (A_{12}^t \; u) \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + A_{22} b \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_{11} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & * \\ \hline *^t & a_{ii} \end{array}\right) \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} a \\ *^t a \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}^t A \tilde{x} = (a^t \;\; 0 \;\; b^t) \cdot \begin{pmatrix} A_{11} a + A_{12} b \\ u^t a + v^t b \\ A_{12}^t a + A_{22} b \end{pmatrix}$$

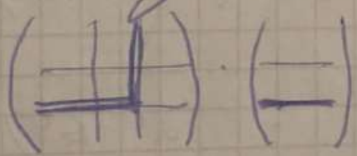
$$= a^t A_{11} a + a^t A_{12} b + b^t A_{12}^t a + b^t A_{22} b > 0$$

pues $\tilde{x} \neq 0$ y A es dp.

$\Rightarrow x^t B x > 0 \;\; \forall x \neq 0.$

$\Rightarrow$ B es dp como queríamos.

(Usé producto por bloques, se puede probar que las cuentas dan haciendo un primer producto y volviendo a descomponer



1° hago el producto donde está marcado más grueso y después uso bloques de nuevo.

Otra opción para hacerlo. Tomo P una matriz de permutación, que ~~[illegible]~~ coloca la i-ésima fila en la última fila y mantiene el orden relativo de las demás. P^t a derecha hace lo mismo pero con la i-ésima columna. Como P es inversible, es un ej. de la guía

¡esta me gustó!

A es SDP $\Leftrightarrow$ PAP^t es SDP. Luego bastaba ver solamente que sacando la última fila y columna queda SDP. Pero eso lo probamos en la teórica.

(4) $Q = \begin{pmatrix} | & & | \\ cl_1(Q) & \cdots & cl_n(Q) \\ | & & | \end{pmatrix}$

a) $$u^t v = \left(\sum_{i=1}^n e_i\right)^t \cdot \sum_{j=1}^n cl_j(Q)$$

$$= \sum_{i=1}^n e_i^t \cdot \sum_{j=1}^n cl_j(Q)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underbrace{e_i^t \cdot cl_j(Q)}_{\underbrace{(0\,0 \dots \underset{\uparrow\, i}{1}\, 0 \dots) \cdot \begin{pmatrix} q_{1j} \\ \vdots \\ q_{nj} \end{pmatrix}}_{= q_{ij}}} = \boxed{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}}$$

b) ~~Por (a)~~

NO VA. $$\cancel{\left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}\right| = |u^t v| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|u\|_2 \cdot \|v\|_2}$$

~~Pero~~ $$\cancel{\|u\|_2 = \|(1, 1, \dots, 1)\| = \sqrt{\underbrace{1^2 + \dots + 1^2}_{n \text{ veces}}} = \sqrt{n}}$$

$$\cancel{\|v\|_2 = \left\|\sum_{j=1}^n cl_j(Q)\right\| \leq \sum_{j=1}^n \underbrace{\|cl_j(Q)\|}_{= 1 \text{ pues } Q \text{ es ortogonal}}}$$

NO VA. ~~Por a)~~ $$\cancel{\left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}\right| = |u^t v| =}$$

(el b) está al final)

c) Consideremos la matriz $|Q| = \begin{pmatrix} |q_{11}| & \cdots & |q_{1n}| \\ \vdots & & \vdots \\ |q_{n1}| & \cdots & |q_{nn}| \end{pmatrix}$ que resulta de tomar valor absoluto en cada coordenada de Q.

Definiendo $\tilde{v} = \sum_{j=1}^{n} cl_j(|Q|)$, por el inciso a) (la misma cuenta) resulta que:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |q_{ij}| = u^t \tilde{v} \le |u^t\tilde{v}| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le} \|u\|_2 \cdot \|\tilde{v}\|_2$$

$$\|u\|_2 = \sqrt{\underbrace{1^2 + \cdots + 1^2}_{n}} = \sqrt{n} = n^{1/2}$$

$$\|\tilde{v}\|_2 = \left\| \sum_{j=1}^{n} cl_j(|Q|) \right\|_2 \le \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\|cl_j(|Q|)\|_2}_{} = n$$

la norma 2 no cambia al poner módulo a los coeficientes.
Como Q es ortogonal
$\Rightarrow \|cl_j(|Q|)\|_2 = \|cl_j(Q)\|_2 = 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |q_{ij}| \le n^{1/2} \cdot n = n^{3/2}.$$

d) $\|x\|_1 \ge \|x\|_2$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| \ge \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 \ge \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i|\cdot|x_j| \ge \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

Esta última desigualdad es cierta pues todos los términos de la derecha aparecen en la suma de la izquierda (para $i=j$ $|x_i|\cdot|x_j| = |x_i|^2$).

Luego, como era una cadena de $\Leftrightarrow$ vale que $\|x\|_1 \ge \|x\|_2$.

Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |q_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} \|fil_i(Q)\|_1 \underset{\text{por lo anterior}}{\ge} \sum_{i=1}^{n} \|fil_i(Q)\|_2 = n$$

las filas tienen $\|\cdot\|_2 = 1$ pues Q es ortogonal.

b) Notemos que $v = \sum_{j=1}^{n} c_j(Q) = Q \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = Q \cdot u$

Luego

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}\right| \overset{a)}{=} \left|u^t v\right| = \left|u^t (Q u)\right| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|u\|_2 \cdot \|Q u\|_2 \overset{Q \text{ es ortogonal}}{=} \|u\|_2^{\cancel{2}} \text{ ok}$$

Como $u = \underbrace{(1\ 1 \dots 1)}_{n} \Rightarrow \|u\|_2^2 = \underbrace{1^2 + \dots + 1^2}_{n} = n$

$$\Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}\right| \leq n$$

Tomando $Q = Id$ se alcanza la igualdad:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}\right| = n$$

son n unos y los demás son ceros.