

FINAL DE ÁLGEBRA I

(15-11-22)

N. I.
(nibanez123@gmail.com)

“Todo lo llenas tú, todo lo llenas.”
Pablo Neruda

Ejercicio 1

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Calcule la cantidad de relaciones de equivalencia \mathfrak{R} de A que satisfacen

$$\{(1, 1), (1, 3), (3, 2), (4, 5), (7, 6), (8, 9)\} \subseteq \mathfrak{R} \quad y \quad (1, 10) \notin \mathfrak{R}.$$

Resolución:

Vamos a utilizar para resolver este ejercicio la existencia de una biyección entre las relaciones de equivalencia que se pueden definir en A y las particiones que tal conjunto admite (ver la Proposición 1.2.8 del libro hecho para la materia por Teresa Krick). Teniendo en cuenta esto, si \mathfrak{R} es una relación de equivalencia sobre A tal que, por ejemplo, $(1, 3) \in \mathfrak{R}$, la partición correspondiente a tal relación tendrá a los elementos 1 y 3 en el mismo subconjunto (ya que a través de la biyección entre relaciones de equivalencia y particiones, las clases de equivalencia de una tal relación se corresponden con los subconjuntos de la partición correspondiente a ella). Luego, una partición de A correspondiente a una relación de equivalencia sobre A como la del enunciado, verifica que:

- 1, 2 y 3 son elementos del mismo subconjunto de la partición.
- 4 y 5 son elementos del mismo subconjunto de la partición.
- 6 y 7 son elementos del mismo subconjunto de la partición.
- 8 y 9 son elementos del mismo subconjunto de la partición.
- 1 y 10 son elementos de distintos subconjuntos de la partición.

De lo anterior se deduce que la cantidad mínima de subconjuntos para una tal partición es 2 (la única es $\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11\}, \{10\}\}$) y la cantidad máxima es 6 (la única es $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}, \{8, 9\}, \{10\}, \{11\}\}$). Contemos las restantes particiones, es decir, aquellas que tienen 3, 4 o 5 subconjuntos (notar antes de empezar que 1 y 10 están desde el inicio en subconjuntos distintos, que 2 y 3 están en el subconjunto que contiene a 1, y que basta incluir a 4, 6 u 8 en determinado subconjunto para incluir a la vez a 5, 7 o 9 respectivamente):

- 3 subconjuntos: la cantidad de formas de incluir en el subconjunto inicialmente vacío un elemento entre 4, 6, 8 y 11 es $\binom{4}{1}$, y por cada una de ellas, cada uno de los tres elementos restantes puede ser incluido en cualquiera de los 3 subconjuntos. Luego, $\binom{4}{1} \cdot 3^3$ es la cantidad de particiones con 3 subconjuntos.
- 4 subconjuntos: la cantidad de formas de incluir en uno de los subconjuntos inicialmente vacíos un elemento entre 4, 6, 8 y 11 es $\binom{4}{1}$; por cada una de ellas, la cantidad de formas de incluir a uno de los tres elementos restantes en el otro subconjunto vacío es $\binom{3}{1}$, y por cada una de ellas cada uno de los dos elementos restantes puede ser incluido en cualquiera de los 4 subconjuntos. Luego, $\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot 4^2$ es la cantidad de particiones con 4 subconjuntos.
- 5 subconjuntos: la cantidad de formas de incluir en uno de los subconjuntos inicialmente vacíos un elemento entre 4, 6, 8 y 11 es $\binom{4}{1}$; por cada una de ellas, la cantidad de formas de incluir a uno de los tres elementos restantes en otro de los subconjuntos inicialmente vacíos es $\binom{3}{1}$; por cada una de ellas, la cantidad de formas de incluir a uno de los dos elementos restantes en el último subconjunto vacío es $\binom{2}{1}$, y por cada una de ellas el elemento restante puede ser incluido en cualquiera de los 5 subconjuntos. Luego, $\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot 5$ es la cantidad de particiones con 5 subconjuntos.

Finalmente, sumando todo, tenemos que la cantidad de particiones (y por lo tanto de relaciones de equivalencia) en A cumpliendo lo pedido es

$$1 + \binom{4}{1} \cdot 3^3 + \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot 4^2 + \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot 5 + 1.$$

■

Ejercicio 2

Pruebe que $d := (7^{n-1} + 5^{n+2} : 5 \cdot 7^n - 5^{n+1})$ divide a 176 para todo $n \in \mathbb{N}$. Pruebe además que si n es par entonces $d \in \{8, 16, 88, 176\}$ y que si n es impar entonces $d \in \{2, 22\}$.

Resolución:

Veamos que $d \mid 176$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En primer lugar tenemos que

$$d \mid 7^{n-1} + 5^{n+2} \Rightarrow d \mid 35 \cdot 7^{n-1} + 35 \cdot 5^{n+2} \Rightarrow d \mid 35 \cdot 7^{n-1} + 175 \cdot 5^{n+1}, \quad (i)$$

$$d \mid 5 \cdot 7^n - 5^{n+1} \Rightarrow d \mid 35 \cdot 7^{n-1} - 5^{n+1}. \quad (ii)$$

Luego, por (i) y (ii) resulta que $d \mid 176 \cdot 5^{n+1}$ (iii).

En segundo lugar tenemos que

$$d \mid 5 \cdot 7^n - 5^{n+1} \Rightarrow d \mid 176 \cdot 5 \cdot 7^n - 176 \cdot 5^{n+1}. \quad (iv)$$

De (iii) y (iv) resulta que $d \mid 176 \cdot 5 \cdot 7^n$.

Entonces,

$$d \mid (176 \cdot 5^{n+1} : 176 \cdot 5 \cdot 7^n) = 176 \cdot 5 \cdot (5^n : 7^n) = 176 \cdot 5 \cdot (5 : 7)^n = 176 \cdot 5 \cdot 1^n = 176 \cdot 5$$

, que implica que $d \mid 176$ pues $(d : 5) = 1$ (ya que $5 \mid d \Rightarrow 5 \mid 7^{n-1} + 5^{n+2} \Rightarrow 5 \mid 7^{n-1}$, lo que es absurdo). Probamos así que $d \mid 176$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veamos ahora que si n es par entonces $d \in \{8, 16, 88, 176\}$. Como $176 = 2^4 \cdot 11$ se tiene que $Div_+(176) = \{1, 2, 4, 8, 11, 16, 22, 44, 88, 176\}$, y por lo tanto $d \in \{8, 16, 88, 176\}$ si y sólo si $8 \mid d$. Sea $n \in \mathbb{N}$ par. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k$. Entonces,

$$d := (7^{n-1} + 5^{n+2} : 5 \cdot 7^n - 5^{n+1}) = (7^{2k-1} + 5^{2k+2} : 5 \cdot 7^{2k} - 5^{2k+1}).$$

Luego,

$$7^{2k-1} + 5^{2k+2} \equiv (-1)^{2k-1} + 25^{k+1} \equiv -1 + 1^{k+1} \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod{8},$$

$$5 \cdot 7^{2k} - 5^{2k+1} \equiv 5 \cdot 49^k - 5 \cdot 25^k \equiv 5 \cdot 1^k - 5 \cdot 1^k \equiv 5 - 5 \equiv 0 \pmod{8},$$

y por lo tanto $8 \mid 7^{2k-1} + 5^{2k+2}$ y $8 \mid 5 \cdot 7^{2k} - 5^{2k+1}$, de lo cual resulta que $8 \mid d$.

Veamos para terminar que si n es impar entonces $d \in \{2, 22\}$. Esto último sucede si y sólo si $2 \mid d$ y $4 \nmid d$. Sea $n \in \mathbb{N}$ impar. Luego, existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $n = 2k + 1$. Entonces,

$$d := (7^{n-1} + 5^{n+2} : 5 \cdot 7^n - 5^{n+1}) = (7^{2k} + 5^{2k+3} : 5 \cdot 7^{2k+1} - 5^{2k+2}).$$

Luego,

$$7^{2k} + 5^{2k+3} \equiv 1^{2k} + 1^{2k+3} \equiv 1 + 1 \equiv 2 \equiv 0 \pmod{2},$$

$$5 \cdot 7^{2k+1} - 5^{2k+2} \equiv 1 \cdot 1^{2k+1} - 1^{2k+2} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{2},$$

$$7^{2k} + 5^{2k+3} \equiv 49^k + 1^{2k+3} \equiv 1^k + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod{4},$$

y por lo tanto $2 \mid 7^{2k} + 5^{2k+3}$, $2 \mid 5 \cdot 7^{2k+1} - 5^{2k+2}$ y $4 \nmid 7^{2k} + 5^{2k+3}$, de lo cual resulta que $2 \mid d$ y $4 \nmid d$. ■

Ejercicio 3

Pruebe que si $w \in \mathbb{C}$ satisface $w^{13} = 1$, entonces $(w^{39} + w^{20})(w^{32} - 1)$ es imaginario puro.

Resolución:

Tenemos que

$$\begin{aligned}(w^{39} + w^{20})(w^{32} - 1) &= (w^{r_{13}(39)} + w^{r_{13}(20)})(w^{r_{13}(32)} - 1) \\ &= (w^0 + w^7)(w^6 - 1) \\ &= (1 + w^7)(w^6 - 1) \\ &= w^6 - 1 + w^{13} - w^7 \\ &= w^6 - 1 + 1 - w^7 \\ &= w^6 - w^7 \\ &= w^6 - ((w^7)^{-1})^{-1} \\ &= w^6 - (w^{-7})^{-1} \\ &= w^6 - (w^{r_{13}(-7)})^{-1} \\ &= w^6 - (w^6)^{-1} \\ &= w^6 - \overline{w^6} \\ &= 2\operatorname{Re}(w^6)i,\end{aligned}$$

pues $(a+bi) - (a-bi) = 2bi$, lo que prueba que $(w^{39} + w^{20})(w^{32} - 1)$ es imaginario puro. ■

Ejercicio 4

Encuentre todos los valores de a para los cuales el polinomio

$$X^3 - 2aX^2 - a^2X + 2a \in \mathbb{C}[X]$$

tiene dos raíces cuya suma es 3 y cuyo producto es 2.

Resolución:

Sean $f := X^3 - 2aX^2 - a^2X + 2a$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, $\alpha + \beta = 3$ y $\alpha \cdot \beta = 2$. Luego,

$$\alpha \cdot \beta = 2 \Rightarrow \beta = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \alpha + \frac{2}{\alpha} = 3 \Rightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow (\alpha - 1)(\alpha - 2) = 0,$$

lo que implica que $\alpha = 1$ y $\beta = 2$, o $\alpha = 2$ y $\beta = 1$.

Ahora utilizamos que $f(1) = f(2) = 0$ para encontrar el o los valores de a .

Resulta

$$f(1) = 1^3 - 2a1^2 - a^21 + 2a \Rightarrow 0 = 1 - 2a - a^2 + 2a \Rightarrow 0 = -a^2 + 1 \quad (i)$$

$$f(2) = 2^3 - 2a2^2 - a^22 + 2a \Rightarrow 0 = 8 - 8a - 2a^2 + 2a \Rightarrow 0 = -2a^2 - 6a + 8 \quad (ii)$$

De (i) se obtiene $a = 1$ o $a = -1$. Reemplazando en (ii),

$$0 = -2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = -2 - 6 + 8$$

que vale, y

$$0 = -2(-1)^2 - 6(-1) + 8 = -2 + 6 + 8 = 12,$$

lo que es absurdo.

Se concluye así que $a = 1$.

■