Hoja 1 | Ejercicio 1 | Eric Brandwein

a)

$$A = m\left[\begin{array}{c}\overbrace{\left(\quad\right)}^{n}\end{array}\right] \qquad e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad Ae_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} n=3 \\ m=3\end{matrix}}$$

$$Ae_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix} \text{, ya que} \qquad Ae_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\dim(Nu(C)) = 2 \Leftrightarrow \exists$ un conjunto de 2 vectores l.i. cuyas combinaciones lineales forman el $Nu(C)$. Lo mismo ocurre con $\dim(Im(C))$, que es igual a $2 \Leftrightarrow \exists$ un conjunto de 2 vectores l.i. (formados por $C.x$) cuyas combinaciones lineales forman ~~...~~ la $Im(C)$. Como la dimensión de la imagen es igual a la dimensión del conjunto de vectores x tal que $Cx \neq \emptyset$, la dimensión de los vectores "multiplicables" por C será 4, o sea, pertenecerán a $\mathbb{R}^4$. Por lo tanto, la cantidad de columnas de C será $4 \Rightarrow \boxed{s=4}$

$$A.B = 3\left[\overbrace{\left(\quad\right)}^{3}\right] . 3\left[\overbrace{\left(\quad\quad\right)}^{s}\right] = 3\left[\overbrace{\left(\quad\quad\right)}^{s}\right] = C$$

otro modo de dimensión

b) $Nu(A) = \{\emptyset\} \Rightarrow Nu(B) = Nu(AB)$

$Nu(A) = \{x \mid Ax = \emptyset\} = \{\emptyset\}$ $\quad Nu(B) = \{x \mid Bx = \emptyset\}$ $\quad Nu(AB) = \{x \mid ABx = \emptyset\}$

~~$$A.B = \begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}&b_{14}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}&b_{24}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}&b_{34}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_{11}+b_{31}&b_{12}+b_{32}&b_{13}+b_{33}&b_{14}+b_{34}\\b_{11}+b_{21}&b_{12}+b_{22}&b_{13}+b_{23}&b_{14}+b_{24}\\b_{21}+b_{31}&b_{32}+b_{22}&b_{23}+b_{33}&b_{24}+b_{34}\end{pmatrix} =$$~~

~~Las filas de AB son combinaciones lineales de las filas de B.~~

~~$= (A.b_1 \; Ab_2 \; Ab_3 \; A.b_4)$, siendo $b_1, \ldots, b_4$ las columnas de B.~~

~~$Ab_1, \ldots, Ab_4$ son $\neq \emptyset$ ya que $Nu(A) = \{\emptyset\}$.~~

$Nu(A) = \{\emptyset\}$ implica que A es inversible $\Rightarrow ABx = \emptyset \Leftrightarrow Bx = A^{-1}\emptyset = \emptyset$

Entonces $Nu(AB) = Nu(B)$.

c) Como $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Nu(A) = \{0\}$, ya que puedo

aplicarle la eliminación Gaussiana a A y encontrar que

$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2 - F_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 - F_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A'$

Por ser A' triangular superior, su determinante es igual a $\emptyset$ sii algún elemento de la diagonal es $\emptyset$. Como no es así, el $\det(A') \neq \emptyset$. A su vez, $\det(A') = \det(A)$, lo que hace a A inversible $\Rightarrow Nu(A) = \{\emptyset\}$. Entonces, como vimos en b), $Nu(B) = Nu(AB) \Rightarrow \dim(Nu(B)) = \dim(Nu(AB)) = 2$.
Como el dominio de B es $\mathbb{R}^4$, y su rango es igual a su dominio menos su núcleo, su rango es 2. ✓

Hoja 2 | Ejercicio 2 | Eric Brandwein

$w_k = (0,\dots,\underbrace{0}_{k},\overset{k}{*},\dots,*)^t$ $\quad (w_{(k)})_i = 0$ para $i \le k$

a) $n \ge 2$, $n > l \ge 0$, $m \le n$

$$Y = v_{(l)}\, x^t_{(m)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots 0 \cdots & & 0 \\ \vdots & & v'x'^t & \\ 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix} \Big]\, l$$

$$l\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ *\\ \vdots\\ *\end{pmatrix}(0\,0\cdots 0 \underbrace{*}_{m} \cdots *)$$

La matriz Y tiene factorización LU sin pivoteo $\Leftrightarrow$ se puede hacer eliminación Gaussiana sin pivoteo $\Leftrightarrow$ en cada paso de la eliminación los valores de la columna en las filas "debajo" de la diagonal son 0, ó el valor de la diagonal es distinto de 0.

Si $l > m$, entonces la matriz Y quedará en algo como lo mostrado anteriormente, con $v'x'^t$ teniendo más columnas que filas, ya que $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A su vez, la primera columna de $v'x'^t$ no contendrá al valor de la diagonal de Y, por el mismo motivo. Esto quiere decir que el valor de la diagonal en esa columna será 0, mientras que ningún valor de $v'x'^t$ es 0, por ser compuesto solamente por multiplicaciones de números distintos a 0.

Los primeros m pasos de la eliminación Gaussiana de Y serán simples, porque las primeras m columnas de Y son nulas, pero cuando se llegue a la columna $m+1$, habrá un 0 en la diagonal y valores distintos de 0 en las filas de abajo, y por lo tanto se tendrá que hacer pivoteo para poder encontrar un escalar por cada fila que anule los valores de los mismos al multiplicarlo por la fila m. Esto nos lleva a que $l \not> m \Rightarrow l \le m$.

Si $l \le m$, $v'x'^t$ contendrá al elemento de la diagonal de Y. Además, las filas de $v'x'^t$ están compuestas por ¿dónde?

~~b) n=3~~ $\begin{pmatrix} v'_1 Z'^t \\ v'_2 Z'^t \\ v'_3 Z'^t \\ \vdots \\ v'_n Z'^t \end{pmatrix}$

Por lo tanto, ~~el escalar~~ los escalares que se usen cuando se llegue a la columna $m+1$ para anular los valores de las columnas serán, para cada fila $i > 1$, v_i / v_1. Al multiplicar este escalar por $v'_1 Z'$ y restando el resultado de la fila correspondiente, no solo se anulará ~~la columna~~ el valor de la columna, sino que se anulará toda la fila i. Esto ocasionará que los siguientes pasos de la eliminación Gaussiana sean tan simples como al principio: todos los valores debajo de la diagonal serán $\emptyset$ de antemano, y no se tendrá que restar nada.

Más muy claro mejor escribís la cuenta!

b) $n \geq 3,\ l > m$ $\quad v_{(l)} Z_{(m)}^t = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & v'Z'^t & \\ 0 \cdots 0 & & & \end{pmatrix} \Big\} l = Y$

$\underbrace{}_{m}$

Hallar P_1, L_1, U_1 y P_2, L_2, U_2 tal que

$P_1 Y = L_1 U_1$ y $P_2 Y = L_2 U_2$

Una opción es mover la fila $l+1$ a la fila $m+1$, para tener en la diagonal sólo valores $\neq \emptyset$:

$P_1 = \begin{pmatrix} I & & \\ 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ & I & \\ 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ & & I \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ ] \text{ fila } m+1 \\ \\ ] \text{ fila } l+1 \\ \\ \end{array}$, o sea, P_1 ~~tiene 1 en la~~ es igual a la identidad excepto en las filas $m+1$ y $l+1$.

columna $l+1$

columna $m+1$

Con este P_1, la fila $m+1$ de $P_1 Y$ tendrá la primer fila de $v'Z'^t$ (después de m ceros). Su factorización LU será: (*)

~~$P_1 Y = \begin{pmatrix} 1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & \vdots & \\ & 1 \; 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 \, (v'Z'^t)_1 \\ \emptyset \end{pmatrix}] \text{ fila } m+1 = L_1 U_1$~~

~~fila $l+1$ columna $m+1$~~

Hoja 3 | Ejercicio 2 (cont.) | Eric Brandwein

en donde $(V'Z'^t)_1$ es la primer fila de $V'Z'^t$.

Podemos modificar esta P_1 para que también permute alguna ~~fila~~ otra fila de $(V'Z'^t)$~~, lo que nos dejará con la misma U_1, pero cambiará a L_1. Si hacemos que P_2 también permute, por ejemplo~~. Si $(V'Z'^t)$ no tiene otra fila, entonces, como ~~[illegible]~~ # filas de $(V'Z'^t) = n-l$, $n \geq 3$, hay por lo menos 2 filas en Y con ceros. Si la P_2 solamente permuta esos 2 filas además de permutar las filas de P_1, $L_1 = L_2$ y $U_1 = U_2$. Si, en cambio, habría otra fila de $V'Z'^t$, en vez de permutar la fila $l+1$ y $m+1$, podríamos permutar las $l+2$ y $m+1$. Así, la L_2 cambiaría a tener los coeficientes necesarios en la columna $m+1$, y la U_2 tendría a la fila $l+2$ de Y en ~~la~~ su fila $m+1$, en vez de la fila $l+1$ de Y.

$$
⊛\; P_1 Y = \underbrace{\begin{array}{c} \\ \\ \text{fila } l+1 \; [\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \emptyset \\ \emptyset & \begin{matrix} 1 \\ c_2 \\ c_i \\ \emptyset \\ c_{n-l-2} \\ c_{n-l-1} \\ c_{n-l} \end{matrix} & \emptyset \; 1 \end{pmatrix}}_{L_1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \emptyset \\ 0 \dots 0 \, (V'Z'^t)_1 \\ \emptyset \end{pmatrix}}_{U_1} \;] \text{ fila } m+1
$$

columna $m+1$

siendo C_2, C_i, C_{n-l} los ~~[illegible]~~ v_i/v_1

Si hubiera una sola fila no nula que permutar ¿cuál sería la otra factorización distinta?

Hoja 4 | Ejercicio 3 | Eric Brandwein

A: inversible

a) $\lambda A^t A$: d.p $\Leftrightarrow \lambda > 0$

$\Updownarrow$

$\forall x \neq 0, \ x^t(\lambda A^t A)x > 0$

$x^t(\lambda A^t A)x = \lambda x^t A^t A x \overset{\text{por ser número}}{=} (\lambda x^t A^t A x)^t = \lambda (Ax)^t (x^t A^t)^t =$

$= \lambda (Ax)^t Ax$ Como A es inversible, $Nu(A) = \{0\} \Rightarrow$

$Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow \lambda(Ax)^t Ax = \lambda \|Ax\|_2^2$

$\lambda = 0$

$\Updownarrow$

$\boxed{\neq 0} \Rightarrow \lambda \|Ax\|_2^2 \leq 0$

$\lambda 0$

$\Updownarrow$

$x^t(\lambda A^t A)x \leq 0$

b) $\lambda > 0 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} \lambda A^t A & A^t \\ A & \frac{2(I+uu^t)}{\lambda} \end{pmatrix}$: s.d.p.

Primero, veamos que B es simétrica.

- $A^t A$ es simétrica, por ser una multiplicación de matriz cuadrada por su traspuesta, entonces $\lambda A^t A$ también lo es.
- $B_{21} = B_{12}^t$, porque $A = (A^t)^t$
- tanto I como uu^t son simétricos, y por lo tanto $\frac{2(I+uu^t)}{\lambda}$ también lo es.

Como todas sus partes son simétricas, B es simétrica.

B: sdp $\Leftrightarrow$ B tiene factorización de Cholesky. Intentemos de sacarla haciendo una multiplicación por bloques.

$$B = \left(\begin{array}{c|c} \lambda A^t A & A^t \\ \hline A & \frac{2(I+uu^t)}{\lambda} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} L_{11} & 0 \\ \hline L_{21} & L_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} L_{11}^t & L_{21}^t \\ \hline 0 & L_{22}^t \end{array}\right)$$

Cada bloque de B y de L tiene las mismas dimensiones, $n \times n$.

$\cdot\ \lambda A^tA = L_{11}L_{11}^t \leftarrow$ Sabemos que existe porque $\overset{\lambda\neq 0,}{\lambda} A^tA$ es simétrica y d.p., y L_{11} es triangular inferior con valores distintos de 0 en la diagonal $\Rightarrow$ es su factorización de Cholesky.

$\left.\begin{array}{l}\cdot\ A^t = L_{11}L_{21}^t \\ \cdot\ A = L_{21}L_{11}^t\end{array}\right]$ ningún problema $A = (A^t)^t$

$\cdot\ \dfrac{2(I+uu^t)}{\lambda} = L_{21}L_{21}^t + L_{22}L_{22}^t = \left(\overset{A}{\cancel{A}}L_{11}^{t^{-1}}\right)\left(L_{11}^{-1}A^t\right) + L_{22}L_{22}^t$

L_{11} inversible porque es L de Cholesky de A

$$\frac{2}{\lambda}(I+uu^t) = \frac{2}{\lambda}I + \frac{2}{\lambda}uu^t \quad \Updownarrow$$

$$\left(\frac{2}{\lambda}(I+uu^t)\right)^t = \left(\left(AL_{11}^{t^{-1}}\right)\left(L_{11}^{-1}A^t\right) + L_{22}L_{22}^t\right)^t$$

$$\frac{2}{\lambda}(I+uu^t) = \left(\left(A L_{11}^{t^{-1}}\right)\left(L_{11}^{-1}A^t\right)\right)^t + L_{22}L_{22}^{t} =$$

$$= \cancel{L_{11}^{-1}A^t}\left\{L_{11}^{-1}A^t\right\}\left(L_{11}^{-1}A^t\right)^t + L_{22}L_{22}^t =$$

$$= L_{11}^{-1}A^tA\left(L_{11}^{-1}\right)^t + L_{22}L_{22}^t$$

$$2(I+uu^t) = L_{11}^{-1}\lambda A^tA\left(L_{11}^{-1}\right)^t + \lambda L_{22}L_{22}^t =$$

$$= \overline{L_{11}^{-1}L_{11}L_{11}^tL_{11}^{t^{-1}}} + \lambda L_{22}L_{22}^t =$$

$$= I + \lambda L_{22}L_{22}^t$$

$$I + 2uu^t = \lambda L_{22}L_{22}^t \Leftrightarrow \overbrace{\left(\frac{I+2uu^t}{\lambda}\right)}^{C} = L_{22}L_{22}^t \Leftrightarrow C \text{ s.d.p.}$$

Veamos que C es s.d.p

- Es simétrica, ya que $\left(\dfrac{I+2uu^t}{\lambda}\right)^t = \dfrac{(I+2uu^t)^t}{\lambda} = \dfrac{I+2uu^t}{\lambda}$
- Es d.p. $\Leftrightarrow \forall x\neq 0,\ x^t\left(\dfrac{I+2uu^t}{\lambda}\right)x > 0 \underset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} x^t(I+2uu^t)x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^t(Ix + 2uu^tx) > 0 \Leftrightarrow x^tIx + x^t2uu^tx > 0 \Leftrightarrow \|x\|_2^2 + x^t2uu^tx > 0$

$x^t2uu^tx = 2(u^tx)^tu^tx = 2\|(u^tx)\|_2^2 \geq 0 \Rightarrow$ como $\|x\|_2^2 > 0$ si $x\neq 0$, $x^tCx > 0\ \forall x\neq 0 \Rightarrow C = L_{22}L_{22}^t$.

Como pudimos encontrar L_{11}, L_{21} y L_{22}, B tiene factorización de cholesky $\Leftrightarrow B$ es s.d.p

Hoja 5	Ejercicio 4	Eric Brandwein

b) $Q^{-1} = Q^t = Q \Rightarrow QQ^{-1} = QQ = I = Q^2 = Q^2 Q^2 = Q^{2k}$?

- Si n es par, $Q^n = I$
- Si n es impar $Q^n = Q^{n-1} Q = IQ = Q$ ✓

c) $Q^{-1} = Q^t = -Q \Rightarrow QQ^{-1} = -QQ = I = -Q^2$

- Si n es múltiplo de 2 pero no de 4, $Q^n = -I$ ✓
- Si n es múltiplo de 4, $Q^n = Q^{n-2} Q^2 = (-I)(-I) = I$ ✓
- Si n es $\equiv 1 (4)$, $Q^n = Q^{n-1} Q^1 = I Q^1 = Q$ ✓
- Si n $\equiv 3 (4)$, $Q^n = Q^{n-1} Q^1 = (-I) Q^1 = -Q$ ✓

a) H es una reflexión de Householder de u, que lleva al vector $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ al vector $y = \begin{pmatrix} 0 \\ X \\ 0 \end{pmatrix}$. Como es una reflexión de Householder, las normas 2 de los vectores deben ser iguales. Por lo tanto, $y = \begin{pmatrix} 0 \\ \|x\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. La u que deseamos es simplemente la resta entre estos 2 vectores: $u = x - y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}$. Veamos que es cierto:

$$HA = \left(I - 2 \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix} (2 \; 1-\sqrt{6} \; 1)}{(2 \; 1-\sqrt{6} \; 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}} \right) A =$$

$$= \left(I - 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2-2\sqrt{6} & 2 \\ 2-2\sqrt{6} & 1-2\sqrt{6}+6 & 1-\sqrt{6} \\ 2 & 1-\sqrt{6} & 1 \end{pmatrix}}_{B} \Big/ (4+1-2\sqrt{6}+6+1) \right) A =$$

$$= \left(I - B/6-\sqrt{6} \right) A = A - (B/6-\sqrt{6}) A = A - BA/6-\sqrt{6}$$

Tenemos que ver solamente que $(\text{Fila}_1 \text{ de } B) \cdot (\text{Col}_2 \text{ de } A) = a_{12} \cdot (6-\sqrt{6})$ y $(\text{Fila}_3 \text{ de } B)(\text{col}_2 \text{ de } A) = a_{32} \cdot (6-\sqrt{6})$ Ok

• $(4 \quad 2-2\sqrt{6} \quad 2)\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = 8+2-2\sqrt{6}+2 = 12-2\sqrt{6}$

$$a_{12}\cdot(6-\sqrt{6}) = 2(6-\sqrt{6}) = 12-2\sqrt{6} \quad \checkmark$$

• $(2 \quad 1-\sqrt{6} \quad 1)\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = 4+1-\sqrt{6}+1 = 6-\sqrt{6}$

$$a_{32}\cdot(6-\sqrt{6}) = 1(6-\sqrt{6}) = 6-\sqrt{6} \quad \checkmark$$

¿Hacían falta estos puntos?

B

d) $\cancel{H = I - 2\frac{uu^t}{u^tu} \quad H^2 = I - 4\frac{uu^t}{u^tu} + 4\left(\frac{uu^t}{u^tu}\right)^2 = I - 4\left(\frac{uu^t}{u^tu} - \left(\frac{uu^t}{u^tu}\right)^2\right)}$

$\cancel{H^3 = I - 2\frac{uu^t}{u^tu} - 4\left(\frac{uu^t}{u^tu} + \left(\frac{uu^t}{u^tu}\right)^2\right) + 8\left(\frac{uu^t}{u^tu} - \left(\frac{uu^t}{u^tu}\right)^2\right)\frac{uu^t}{u^tu} = I - 6\frac{uu^t}{u^tu} + 12\left(\frac{uu^t}{u^tu}\right)^2 - 8\left(\frac{uu^t}{u^tu}\right)^3}$

e) $A = QR$, $Q^{-1} = Q^t$, R: triangular superior con valores $\neq 0$ en la diagonal, por ser A inversible (lo asumimos por lo dicho por el profesor)

$$A^tA = LU$$

$$A^tA = (QR)^tQR = R^tQ^tQR = R^tQ^{-1}QR = R^tIR = R^tR$$

R^t es diagonal inferior. Podemos decir que $R^t = R'^tD$, con D una diagonal tal que R'^t tiene sólo unos en la diagonal. Ésto se puede hacer porque R no tiene valores 0 en la diagonal. R'^t sigue siendo triangular inferior, y entonces si tomamos $L = R'^t$ y $U = DR$, tendremos que $A^tA = R^tR = R'^tDR = LU$. Como D es diagonal y R es triangular superior, LU es la factorización buscada de A^tA.

¿cómo? (8 lo que se pide)

B

d) $H = I - 2\frac{uu^t}{u^tu} \qquad H^t = \left(I - 2\frac{uu^t}{u^tu}\right)^t = I - 2\left(\frac{uu^t}{u^tu}\right)^t = I - 2\frac{uu^t}{u^tu} = H$

Como las reflexiones de Householder son ortogonales y simétricas, y por lo visto en el punto g), $H^{2018} = I$. A su vez, como las $G(\theta)$ son ortogonales y antisimétricas, y por lo visto en el punto c), $G(\theta)^{2018} = -I$

B