

Guía del acotador frecuente

Propiedades función módulo

- $x \leq |x|, 0 \leq |x|$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x|^n = |x^n|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
- $|x| \geq y \Leftrightarrow -y \geq x \vee x \geq y$
- $|x| = |-x|$
- $x = \text{signo}(x)|x|$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \wedge x = -y$

Para acotar

Por arriba

- $\sin(x) \leq 1$
- $\cos(x) \leq 1$
- $|\sin(x)| \leq 1$
- $|\cos(x)| \leq 1$
- $|\sin(x)| \leq |x|$
- $\sin(x) \cos(x) \leq \frac{1}{2}$
- $|\sin(x)| \leq |\tan(x)|$
- $|e^x - 1| \leq |x|e^{|x|}$
- Desigualdad triangular:

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \quad \|a - b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|V \cdot W| = |\langle V, W \rangle| \leq \|V\| \|W\| \quad \forall V, W \in \mathbb{R}^n$$

- $|x| \leq \|(x, y)\| \leq \sqrt{n} \|(x, y)\|_\infty = \sqrt{n} \max(|x|, |y|) \Leftrightarrow x^2 \leq x^2 + y^2$
- $|y| \leq \|(x, y)\| \leq \sqrt{n} \|(x, y)\|_\infty = \sqrt{n} \max(|x|, |y|) \Leftrightarrow y^2 \leq x^2 + y^2$
- $|e^x| \leq e^{|x|}$

Por abajo

- $\sin(x) \geq -1$
- $\cos(x) \geq -1$
- $\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$
- $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$
- $\sin(x) \cos(x) \geq -\frac{1}{2}$
- $\sqrt{x} \geq \ln(x)$
- $e^x \geq 1 + x$
- $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$

- Desigualdad triangular inversa:

$$\|a - b\| \leq \|a\| - \|b\|$$

$$|a + b| \geq |a| - |b| \quad |a - b| \geq |a| - |b|$$

- $|a| + |b| \geq |a| \Leftrightarrow \frac{1}{|a|+|b|} \leq \frac{1}{|a|}$
- $|a| + |b| \geq |b| \Leftrightarrow \frac{1}{|a|+|b|} \leq \frac{1}{|b|}$
- $\|(x, y) - (a, b)\|^2 > \|(x, y) - (a, b)\|$
- $e^x > 0$
- $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$
- $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \Rightarrow \frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geq xyz$

Todo

$$(x - a, y - b) \neq (0, 0)$$

$$\square \frac{|x-a|}{\|(x,y)-(a,b)\|} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(x-a)^2}{(x-a)^2+(y-b)^2} \leq 1$$

$$\square \frac{|y-b|}{\|(x,y)-(a,b)\|} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(y-b)^2}{(x-a)^2+(y-b)^2} \leq 1$$

Demás cosas

$$\square (x^2 - y^2) = (x + y)(x - y) \quad \square (x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$

$$\square (x - a)^2 = |x - a|^2$$

$$\square (x - a)^3 = |x - a|^2(x - a)$$

■ Rectas que pasan por el punto (x_0, y_0)

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

Si a la hora de demostrar un límite tomamos más de un δ :

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta(\varepsilon)\}$$

Relaciones trigonométricas

$$\square |\operatorname{sen}(x)| = \operatorname{sen}(|x|) \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \quad \square |\operatorname{cos}(x)| = \operatorname{cos}(|x|) \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\square \operatorname{cos}(\pi - x) = -\operatorname{cos}(x) \quad \square \operatorname{sen}(x) \operatorname{cos}(x) = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}$$

$$\square \operatorname{cos}(x) = \operatorname{cos}(-x) \quad \square \operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x) \quad \square \tan(x) = -\tan(-x)$$

$$\square \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1 - \operatorname{cos}(2x)}{2} \quad \square \operatorname{cos}^2(x) = \frac{1 + \operatorname{cos}(2x)}{2}$$

Límites útiles

$$\square \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$$

$$\square \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$

$$\square \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

$$\square \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$\square \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(x) = 0$$

$$\square \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\square \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

■ Si $f(x)$ es acotada y $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} 0$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = 0$$

Límites iterados (como variables independientes)

$$\square \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right)$$

$$\square \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right)$$

Si alguno de ellos no existe, no nos dice nada sobre el límite doble. Si ambos existen y dan distinto, entonces \nexists lím.

$$\square \text{ Si } a_n \rightarrow a \Rightarrow |a_n| \rightarrow |a|$$

$$\square \text{ Si } |a_n| \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

Álgebra de límites

$$\square \text{ Si } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = a, \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = b$$

$$\bullet \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f \pm g)(x, y) = a \pm b$$

$$\bullet \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f \cdot g)(x, y) = ab$$

■ Si $b \neq 0$

$$\bullet \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \left(\frac{f}{g} \right)(x, y) = \frac{a}{b}$$

(Se recomienda como fuente de inspiración para demás cotas el teorema de Lagrange y el desarrollo por series de Taylor)