Teoremas para el final de Análisis II (c)

Este es un compilado de los 19 teoremas en general tomados en los finales de Análisis II (c), basado en las dos listas de teoremas que circulan por ahí. Intento que sea lo más comprensible y completo posible, pero no puedo hacerme responsable si algún teorema no presente acá es tomado en un final. No debiera pasar, pero quién sabe. Desde ya, espero que a quien esté leyendo esto le sirva de algo. La mayoría de las demostraciones aquí presentes fueron tomadas del Cálculo de Larotonda *(Larotondum)* o de apuntes tomados en clase.

Martín del Río

La mayoría de las demostraciones presentes acá fueron escritas con Gallemathic.

Esta página también está disponible para descargar en PDF: Teoremas del final de Análisis II (c).pdf.

Índice

Teorema 1

Sea $f:A \subseteq\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $P \in A^0$, $L \in\mathbb{R}^m$

Entonces vale que: (f es continua en P) $\Leftrightarrow$ ($\forall$sucesión Tn ($n \in \mathbb{N}$) de puntos de A ⁄ Tn $\to$ P, f(Tn) $\to$ f(P))
Nda: en este teorema uso P y p intercambiablemente, pero son la misma variable. Debería corregirlo.

1⇒2
Si f es continua en P, entonces vale que ∀ε>0 ∃δ>0 ⁄ ‖x−p‖<δ ⇒‖f(x)−f(p)‖<ε, es decir que puedo hacer la distancia de f(x) a f(p) tan chica como yo quiera acercando x a p. Sea Tn una sucesión de puntos de A, con n∈ℕ tal que Tn → P. Esto implica que $\exists N_o$ a partir del cual Tn está suficientemente cerca de P. Es decir, ∀ε'>0 $\exists N_o\in\mathbb{N}$ ⁄ $n>N_o$ ⇒ ‖Tn−P‖<ε'. Ahora, como que f sea continua implica que puedo tomar cualquier ε y va a existir un δ, y que Tn → P implica que siempre existe un N_o a partir del cual Tn está a una distancia ε' o menor de P, entonces si tomo δ = ε' puedo decir lo siguiente: ∀ε>0 ∃δ ⁄ ‖Tn−P‖<δ ⇒ ‖f(Tn)−f(P)‖<ε.

2⇒1
Supongamos que f no es continua en P. Entonces esto significa que ∀δ>0 ∃ε>0∧∃x∈A ⁄ ‖x−P‖<δ ∧ ‖f(x)−f(P)‖>ε. Ahora, como para toda sucesión Tn → P vale que f(Tn) → f(P), entonces esto significa que ∀ε>0 ∃δ>0 ⁄ ‖Tn−P‖<δ ⇒ ‖f(Tn)−f(P)‖<ε. Ahora, como f no es continua, dada una sucesión de deltas δi = 1 ⁄ i con i∈ℕ tal que ∀δi>0 ∃ε'>0 ∧ xi∈A ⁄ ‖xi − P‖ < δi ∧ ‖f(xi)−f(p)‖>ε'. Como i → ∞ ⇒ δi → 0, y ‖xi−P‖<δi, entonces se deduce que xi → P. Como xi es una sucesión de puntos de

A que tiende a P, entonces necesariamente $f(x_i) \to f(P)$. Lo que significa que $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0 / \|x_i-p\|<\delta \Rightarrow \|f(x_i)-f(p)\|<\varepsilon$. Ahora, si yo tomo $\varepsilon = \varepsilon'$ llegamos a un absurdo, pues habíamos dicho que $\|f(x_i)-f(p)\|>\varepsilon'$. Ha de ser entonce que f es continua en P.

Como $1\Rightarrow 2 \wedge 2\Rightarrow 1$, entonces $1\Leftrightarrow 2$, que es lo que queríamos probar □

Volver al índice

Teorema 2

(Teorema de Bolzano)
Sea $f:A\subseteq\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Si existen puntos $P\in A$ y $Q\in A$ tales que $f(P)f(Q)<0$, entonces existe un punto $c\in A / f(c) = 0$.

Supongamos que $f(P)>0$ y $f(Q)<0$. El caso inverso es análogo. Sea S entonces el conjunto de los $x \in A / f(x)>0$. $S\neq\emptyset$ porque al menos $P\in S$. Además, S está acotado superiormente al menos por Q, por lo que tiene un supremo s (notar la diferencia entre S y s). Como S es cerrado y acotado, o sea que $S\subseteq[P, s]$, puedo extraer una subsucesión creciente Sn de puntos de S que tienda al supremo. $Sn \to s$. Ahora hay dos posibilidades, $f(s)>0$ o $f(s)=0$.

Si $f(s)>0$, entonces existe un entorno $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)\cap[P, s]$ tal que $f(x)>0\ \forall\ x\in$ese intervalo. Como $s<Q$, ya que $f(Q)<0$, entonces puedo tomar $x_o\in(s, s+\varepsilon)$ tal que $f(x_o)>0$. Pero entonces $x_o\in S$ y $x_o>s$, lo que es absurdo pues s es el supremo del conjunto.

Debe ser entonces que $f(s)=0$.

Tomando $c=s$ se demuestra el teorema □

Volver al índice

Teorema 3

Teorema de Bolzano en $\mathbb{R}^n$

Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A arcoconexo y f continua en A. Si existen $P, Q\in A / f(P)f(Q)<0$, entonces existe $R\in A / f(R)=0$.

Por ser A arcoconexo puedo definir una curva $\alpha(t):[0,1] \to A / \alpha(0) = P$ y $\alpha(1) = Q$.
Considero entonces una función $G(t) = f\circ\alpha(t)$, es continua por composición de continuas y cumple que $G(0) = f(P)$ y $G(1) = f(Q)$.
Como G es continua en $[0,1]$, $G(0)G(1)<0$, entonces existe $c\in(0, 1) / G(c) = 0$. Es decir que $G(c) = f\circ\alpha(c) = f(\alpha(c)) = 0$.

Si tomamos $R = \alpha(c)$ se demuestra el teorema □

Volver al índice

Teorema 4

(Teorema de Weierstrass)
Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A compacto, f continua en A. Entonces existen m y $M \in\mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M\ \forall\ x \in A$. Además existen Pm y PM $\in$ A tales que f alcanza su mínimo y máximo respectivos en A en dichos puntos.

Existencia de m y M:
Veamos el caso de M, total el otro es análogo. Supongamos que f no está acotada superiormente. Entonces no existe $M \in\mathbb{R}$ tal que $M > f(x)\ \forall\ x \in A$. Por lo tanto debe existir una sucesión de puntos An de A tal que $f(An) \geq n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Por ser A compacto, existe una subsucesión convergente de An que tiende a $P \in A$, sea esta subsucesión Ank. Por lo dicho anteriormente, se cumple que $f(Ank) \geq nk\ \forall nk \in\mathbb{N}$. Como f es continua en A, f es continua en P, lo que hace que eso sea imposible (ya que la función en el punto y su límite conicinden y no diverge ni nada ahí por ser continua), por lo que f debe estar acotada superiormente. Por lo tanto existe $M\in\mathbb{R}$ tal que $M>f(x)\ \forall\ x\in A$.

Pm y PM:
Ahora quiero ver que f alcanza su máximo y su mínimo en A. Veamos el caso de PM, en donde alcanza su máximo, el otro es análogo. Por el punto anterior, sé que $Img(f)\subseteq[m, M]$, por lo que tiene un supremo: s. Quiero ver que s es en realidad un máximo. Tomo una sucesión creciente de puntos de Img(f) que tienda al supremo. Como esta sucesión existe, puedo tomar una sucesión An de puntos de A tal que $\lim n \to \infty\ f(An) = s$. De esta sucesión extraigo una subsucesión convergente Ank, y llamamos a su límite Pm, de tal forma que $\lim nk \to \infty\ Ank = Pm$. Como A es un conjunto compacto, $Pm\in A$. Como f es continua en Pm, entonces $f(Pm) = \lim n \to \infty f(Ank) = s$. Por lo tanto f alcanza su máximo en A.

Dicho todo esto queda demostrado el teorema □

Volver al índice

Teorema 5

(Diferenciable $\Rightarrow$ Continua)

Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P\in A^0$, y f diferenciable en P. Entonces f es continua en P.

Partimos de la siguiente obviedad: $0 \leq \|f(x) - f(P)\|, \forall x\in A$.
$\|f(x)-f(P)\| = \|f(x)-f(P)-Df(P)(x-P)+Df(P)(x-P)\|$
Como $\|a+b\| \leq \|a\|+\|b\|$, entonces $\|f(x)-f(P)-Df(P)+Df(P)(x-P)\|\leq\|f(x)-f(P)-Df(P)(x-P)\|+\|Df(P)(x-P)\|$
$Df(P)(x-P) = <\nabla f(P), (x-P)>$ que, por desigualdad de Cauchy−Schwartz, es menor a $\|\nabla f(P)\|\cdot\|x-P\|$. Juntando todo lo que teníamos hasta ahora, nos queda que:
$0 \leq \|f(x) - f(P)\| = \|f(x)-f(P)-Df(P)+Df(P)(x-P)\| \leq \|f(x)-f(P)-Df(P)(x-P)\|+\|Df(P)(x-P)\| \leq \|f(x)-f(P)-Df(P)(x-P)\|+\|\nabla f(P)\|\cdot\|x-P\|$
Ahora, multiplicamos y dividimos al primer término por $\|x-P\|$ y nos queda que $\|f(x)-f(P)-Df(P)(x-P)\|+\|\nabla f(P)\|\cdot\|x-P\| = (\|f(x)-f(P)-Df(P)(x-P)\| / \|x-P\|)\cdot\|x-P\|+\|\nabla f(P)\|\cdot\|x-P\|$
Si se fijan, $\|f(x)-f(P)-Df(P)(x-P)\| / \|x-P\|$ es la definición del diferencial de f en P, y tiende a 0 cuando $x \to P \Leftrightarrow$ f es diferenciable. El segundo término, $\|\nabla f(P)\|\cdot\|x-P\|$, trivialmente tiende a 0 cuando $x \to P$, por lo que ambos términos tienden a 0 y suman 0.

Juntando todo lo que conseguimos, $0 \leq \|f(x) - f(P)\| \leq 0$. Por lo tanto $f(x) \to f(P)$ cuando $x \to P$, lo que hace que f sea continua en P, que es lo que queríamos probar □

Volver al índice

Teorema 6

(Existencia de las derivadas direccionales y unicidad del diferencial)

Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sea $p\in A^0$. Si existe una transformación lineal Tp tal que $\lim_{x \to p} \|f(x) - f(p) - Tp(x-p)\| / \|x-p\| = 0$, entonces:
- **Existen todas las derivadas direccionales de f en p, y su fórmula es Tp(v), con v un versor de R^n.**
- **$Tp(X) = Dfp(X) = <\nabla f(p), X>$ para todo $X\in\mathbb{R}^n$ y f es diferenciable en P.**
- **La transformación lineal Tp es única.**

Si $\lim_{x \to p} \|f(x) - f(p) - Tp(x-p)\| / \|x-p\|$ tiende a 0, entonces lo hace por cualquier curva por la que x tienda a p. Sea entonces $x = p + tV$, con V un versor de $\mathbb{R}^n$.
Entonces $x \to p$ cuando $t \to 0$, por lo que reemplazando me queda que $\lim_{t \to 0} \|f(p+tV)-f(p)-Tp(tV)\| / \|tV\| = 0$.
Como $\|V\| = 1$, entonces eso es igual a $\lim_{t \to 0} \|f(p+tV)-f(p)-Tp(tV)\| / |t| = 0$.
Eso es igual a $\lim_{t \to 0} | (f(p+tV)-f(p)) / t - Tp(v)| = 0$. Puede verse entonces que $(f(p+tV)-f(p)) / t = Tp(v)$. Pero además, $\lim_{t \to 0} (f(p+tV)-f(p)) / t$ es la definición de la derivada en dirección V de f(p), por lo que se deduce que $Tp(V) = \partial f / \partial v(P)$

Como existen todas las derivadas direccionales para cualquier dirección V, en particular existen para cualquier dirección Ei, con Ei un versor de la base canónica. En particular, entonces, existen todas las derivadas parciales de f. Por otro lado, como una transformación lineal se determina por su valor en una base canónica de R^n, y como $Tp(Ei) = \partial f / \partial Ei(p)$, entonces se deduce que $<\nabla f(p), x> = Tp(x)\ \forall x\in\mathbb{R}^n$.

Finalmente, veamos que esta transformación lineal es única. Sea Sp otra transformación lineal que cumple lo enunciado en la hipótesis. Entonces se deduce que $\partial f / \partial v(p) = Sp(v)$ para cualquier versor v de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto esto mismo aplica para versores de la base canónica y, por lo tanto, se deduce que $Sp(v) = <\nabla f(p), v>$. Pero $<\nabla f(p), v> = Tp(v)$, por lo establecido en los puntos anteriores. Se deduce entonces que Tp = Sp □

Volver al índice

Teorema 7

($\nabla f(p)$ es la dirección de máximo crecimiento de f en p)
Sea f una función diferenciable en p. Entonces la dirección de máximo crecimiento de f en p viene dada por $\nabla f(p)$

Sea v un versor cualquiera. Entonces $<\nabla f(p), v> \leq |<\nabla f(p), v>| \leq \|\nabla f(p)\|\cdot\|v\|$. Como $\|v\|=1$, entonces $<\nabla f(p), v> \leq \|\nabla f(p)\|$.

Sea ahora $v = \nabla f(p) / \|\nabla f(p)\|$, que es el gradiente de f en p normalizado, un versor con la misma direción que $\nabla f(p)$. Entonces $<\nabla f(p), v> = <\nabla f(p), \nabla f(p) / \|\nabla f(p)\|> = \|\nabla f(p)\|^2 / \|\nabla f(p)\| = \|\nabla f(p)\|$.

Por lo tanto $\nabla f(p)$ es la dirección de mayor crecimiento de f en p □

Volver al índice

Teorema 8

(Elite Four de teoremas en una variable: Fermat, Rolle, Lagrange y Cauchy)

Teorema de Fermat

Sea f derivable en (a, b) y $p\in(a,b)$ un extremo local de f. Entonces $\nabla f(p) = 0$.

Supongamos que p es un máximo local. Si fuere un mínimo la demostración es análoga. Por ser máximo de f, existe un entorno $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ de p tal que $f(x) \leq f(p)$ $\forall x\in$dicho entorno. Dicho esto, calculemos f'(p) por límites laterales.
$\lim_{t \to 0^+} (f(p+t)-f(p)) / t \leq 0$
$\lim_{t \to 0^-} (f(p+t)-f(p)) / t \geq 0$
Solo puede ser entonces que $\lim_{t \to 0} (f(p+t)-f(p)) / t=0$, por lo que $f'(p) = 0$, que es lo que queríamos probar □

Teorema de Rolle

Sea f continua en [a,b] y derivable en (a,b). Si f(a) = f(b), entonces existe $c\in(a,b)$ tal que f'(c) = 0.

Si f es una función constante, entonces trivialmente su derivada es 0 para todo $x\in(a,b)$. Si f no es constante, entonces necesariamente al menos el máximo o el mínimo se alcanzan en el interior, por teorema de Weierstrass (dado que f es continua en un compacto) (digo en el interior porque capaz el máximo o el mínimo son f(a) y f(b)). Sea c dicho mínimo, por teorema de Fermat f'(c) = 0, que es lo que queríamos probar □

Teorema de Lagrange

Sea f continua en [a,b] y derivable en (a,b). Entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c) = (f(b)-f(a)) / (b-a)$

Consideremos la siguiente función auxiliar: $g(x) = f(x) - L(x)$, donde L es la recta que une f(b) con f(a), de forma que L(a) = f(a) y L(b) = f(b). Por álgebra de continuas y derivables, g es continua en [a,b] y derivable en (a,b). Ahora, como $g(a) = f(a) - L(a) = f(a)-f(a) = 0$ y $g(b)=f(b)-L(b)=f(b)-f(b)=0$, entonces g cumple las hipótesis del teorema de Rolle. Por lo tanto, existe $c\in(a, b)$ tal que g'(c) = 0.
Veamos que $g'(c) = f'(c) - m$ (la t sale de que las rectas como L tienen la pinta p+mx). Como g'(c) = 0, entonces nos queda que f'(c)=m. Pero m es la pendiende te la recta que une f(a) con f(b), por lo que $m = (f(b)-f(a)) / (b-a)$. Reemplazando nos queda que $f'(c)=(f(b)-f(a)) / (b-a)$, que es lo que queríamos probar □

Teorema de Cauchy

Yet again, sea f continua en [a,b] y derivable en (a,b). Entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $(f(b)-f(a))/f'(c) = (g(b)-g(a))/g'(c)$. Este es un resultado técnico más que nada.

Consideremos la siguiente función: $h(x) = (f(x)-f(a))(g(b)-g(a))-(g(x)-g(a))(f(b)-f(a))$. Podemos observar que $h(a) = 0$ trivialmente, y $h(b) = (f(b)-f(a))(g(b)-g(a))-(g(b)-g(a))(f(b)-f(a))$, ambos términos son el mismo, así que $h(b) = 0$. Por lo tanto, h cumple todas las hipótesis del teorema de Rolle (continuidad y derivabilidad las adquiere de por álgebra de derivables y continuas). De esta forma, existe $c\in(a,b) / h'(c)=0$.
Observemos ahora que $h'(c) = f'(c)(g(b)-g(a)) - g'(c)(f(b)-f(a))$. Y como $h'(c) = 0$, entonces tengo que $f'(c)(g(b)-g(a))=g'(c)(f(b)-f(a))$, y distribuyendo llego a que $(f(b)-f(a))/f'(c) = (g(b)-g(a))/g'(c)$, que es a lo que queríamos llegar □

Volver al índice

Teorema 9

$C^1 \Rightarrow$ Diferenciable

Teorema $C^1 \Rightarrow$ diferenciable:

Sea $F: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $P \in \mathring{A}$.

Si las derivadas parciales de F en un entorno de P son continuas, entonces F diferenciable en P.

Demostración:

Quiero ver que $\lim_{X \to P} \frac{|F(X)-F(P)-\nabla F(P)(X-P)|}{\|X-P\|} = 0$

Escribamos $X = P + H$

$$F(P+H) - F(P) = \underbrace{F(P+H) - F(P+(H_1,0))}_{*} + \underbrace{F(P+(H_1,0)) - F(P)}_{\dagger}$$

(*) $F(P_1+H_1, P_2+H_2) - F(P_1+H_1, P_2) = F_Y(P_1+H_1, \alpha) H_2$ Con α entre P_2+H_2 y P_2

TVM (Lagrange) (para derivadas parciales)

(†) $F(P_1+H_1, P_2) - F(P_1, P_2) = F_X(\beta, P_2) \cdot H_1$ Con β entre P_1+H_1 y P_1.

Reemplazando queda:

$$\frac{|F_X(\beta,P_2)\cdot H_1 + F_Y(P_1+H_1,\alpha)\cdot H_2 - [F_X(P_1,P_2)\cdot H_1 + F_Y(P_1,P_2)\cdot H_2]|}{\|(H_1,H_2)\|} \leq$$

$$\leq \frac{|F_X(\beta,P_2) - F_X(P_1,P_2)| \cdot |H_1|}{\|(H_1,H_2)\|} + \frac{|F_Y(P_1+H_1,\alpha) - F_Y(P_1,P_2)| \cdot |H_2|}{\|(H_1,H_2)\|}$$

$$\leq \underbrace{|F_X(\beta,P_2) - F_X(P_1,P_2)|}_{\to 0} + \underbrace{|F_Y(P_1+H_1,\alpha) - F_Y(P_1,P_2)|}_{\to 0}$$

Tienden a 0 pues las derivadas parciales son continuas en P.

Tienden a 0 cuando $(H_1,H_2) \to (0,0)$

(Cortesía de Ezequiel Togno)

Volver al índice

Teorema 10

Teorema del Hessiano

Introducción: Los puntos donde el gradiente de f se anula son candidatos a extremos relativos, pero no tienen por qué serlo. Estos puntos se llaman "puntos críticos". Si uno de estos puntos es efectivamente un extremo, llamemos P al punto, se dice que P es un extremo "estricto" si f(P) > f(X) ∀X en un entorno de P. Nótese que la 'estrictitud' viene dada porque hablamos de > y no de ≥.

Dicho eso, decimos también que P es un punto silla de f si dadas dos trayectorias α y β que tiendan a P, f(α) tiene un máximo en P y f(β) tiene un mínimo en P. En ambos casos, sin embargo, $\nabla f(P) = 0$.

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f una función de clase C^3 en A, con A abierto, $P \in A$ un punto de A tal que $\nabla f(P) = 0$. Entonces si el Hessiano de f en P (Hf(P)) es definido negativo, P es un máximo estricto de f. Si Hf(P) es definido positivo, P es un mínimo estricto de f. Si Hf(P) es indefinido, entonces P es un punto silla de f.

Unas cosas antes: que f sea de clase C^3 implica que sus derivadas primeras, segundas y terceras son continuas. El Hessiano es la matriz de las derivadas segundas de f. Que sea definido positivo implica que los determinantes de sus menores pricipales son todos positivos. Que sea definido negativo implica que los determinantes de sus menores principales son intercaladamente negativos y positivos, empezando por un negativo.

Supongamos que Hf(P) es definido positivo. El caso opuesto es análogo. Entonces para un X suficientemente cercano a P puedo describir a f en base a su polinomio de Taylor en $\mathbb{R}^n$. O sea, $f(X) = f(P) + (1/2)\langle Hf(P)(X-P), (X-P)\rangle + R(X-P)$. Nótese que el término del gradiente −derivadas primeras de f(p)− no aparece porque al ser un punto crítico es nulo.

Dividiendo y multiplicando por $\|X-P\|^2$ nos queda que $f(X)=f(P)+\|X-P\|^2[(1/2)\langle Hf(P)((X-P)/\|X-P\|), ((X-P)/\|X-P\|)\rangle + R(X-P)/\|X-P\|^2]$. Llamemos $Qp(V)$ a $\langle(1/2)Hf(P)(V), V\rangle$. (1/2) afuera o adentro es indistinto.

Nos queda entonces que $f(X)=f(P) + \|X-P\|^2[Qp((X-P)/\|X-P\|) + R(X-P)/\|X-P\|^2]$. Nótese que el vector $(X-P)/\|X-P\|$ tiene la misma dirección que $X-P$ pero es de norma unitaria.

Sea S un conjunto compacto −cerrado y acotado− tal que $S=\{V\in\mathbb{R}/\|V\|=1\}$. Nótese que es una esfera n−dimensional de radio 1 centrada en el origen. Como Qp es una función continua definida de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, entonces por el teorema de Weierstrass alcanza su mínimo en S (no su mínimos absoluto, sino que toca su mínimo dentro de S). Vamos a llamar a este mínimo "mp". Como lo alcanza, entonces existe un versor $Vp/Qp(Vp)=mp$. Como $Vp \neq 0$ ya que $\|Vp\| = 1$, por pertenecer a S, entonces vale que $mp>0$, porque Hf(p) es definido positivo, y esto hace que $Qp(Vp) > 0$ al multiplicar.

Como este era el mínimo que alcanza Qp en la esfera, vale que $Qp \geq mp > 0$ para todo versor V. Por lo tanto, el $Qp((X-P)/\|X-P\|)$ que teníamos en nuestro polinomio de Taylor va a ser siempre mayor a 0 (recordemos que estamos consideando que Hf(P) es definido positivo).

Cuando $X \to P$, $(R(X-P)/\|X-P\|^2) \to 0$ porque la diferencia entre f(X) y f(P) se achica cada vez más (el polinomio de Taylor centrado en P es cada vez más exacto conforme $X \to P$).

Juntando los dos puntos anteriores tenemos que $[(1/2)\langle Hf(P)((X-P)/\|X-P\|), ((X-P)/\|X-P\|)\rangle + R(X-P)/\|X-P\|^2]$ es siempre positivo y mayor a 0, por lo que nos queda que $f(X) = f(P) + \|X-P\|^2$[término mayor a 0], por lo que f(X) es siempre f(P) más un poquito, lo que significa que $f(P) < f(X)$ para todo X en un entorno de P.

El caso en el que Hf(P) es definido negativo y f(P) un máximo local es análogo.

Si Hf(P) fuera indefinido, existiríandos trayectorias W y Z tales que $Qp(W)>0$ y $Qp(Z)<0$. A través de estas trayectorias f(X) es respectivamente mayor y menor a f(P), por lo que se deduce que P ha de ser un punto silla de f □

Volver al índice

Teorema 11

Teorema de los multiplicadores de Lagrange

- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ y $P \in S$. Si P es extremo de f restringido a S y $\nabla g(P) \neq 0$, probar que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$.

  Demo: Sea $P = (x, y)$. Por teorema de la función implícita (aplica porque $\nabla g(P) \neq 0$) existe una función h tal que en una vecindad de P se cumple $g(x, h(x)) = 0$. Podemos ver entonces que en dicha vecindad $\nabla g = 0$ lo que implica, por regla de la cadena,

$$\nabla g(x, h(x))(x, h(x)) = \nabla g(x, h(x)) \cdot (1, h'(x)) = 0.$$

Ahora lo que queremos es un extremo de $f(x, h(x))$ sin ninguna restricción (ya que el punto $(x, h(x))$ siempre pertence a S). Para esto tomamos el gradiente igual a 0: $\nabla f(x, h(x))(x, h(x)) = \nabla f(x, h(x)) \cdot (1, h'(x)) = 0$. Dado que $\nabla g(x, h(x))$ y $\nabla f(x, h(x))$ son ambos perpendiculares al vector $(1, h'(x))$ (su producto interno da 0), deben ser paralelos entre sí, por lo cual existe λ tal que $\nabla f(x, h(x)) = \lambda \nabla g(x, h(x))$ y como $P \in S \Rightarrow y = h(x) \Rightarrow P = (x, h(x))$ queda demostrado el teorema. ■

Volver al índice

Teorema 12

Continua ⇒ Integrable

Veamos que si f es continua en $[a,b]$ entonces es derivable en $[a,b]$.

Sea $\varepsilon > 0$. Busco una partición R del intervalo tal que $S(f,R) - I(f,R) < \varepsilon$ con S la suma superior de f en R e I la inferior. Sea ahora $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a}$. Como f es continua en un compacto, entonces es uniformemente continua (en $[a,b]$). Esto significa que $\exists\, \delta > 0 \,/\, |f(x) - f(y)| < \varepsilon'$ cuando $|x-y| < \delta$.

Tomo entonces una partición R tal que el diámetro de R sea menor a δ.

Entonces, si $x_i, y_i \in \Delta_i \Rightarrow |x_i - y_i| < \delta$.

Ahora, $S(f,R) - I(f,R) = \sum (M_i - m_i)\Delta_i = \sum_i (f(x_i) - f(y_i))\Delta_i$, donde $x_i, y_i \in \Delta_i$, $f(x_i) = \max(f|_{\Delta_i}) = M_i$, $f(y_i) = \min(f|_{\Delta_i}) = m_i$.

Se tiene entonces que $0 \leq f(x_i) - f(y_i) = |f(x_i) - f(y_i)| < \varepsilon'$, porque $|x_i - y_i| < \delta$. Por lo tanto, $S(f,R) - I(f,R) < \sum_i \varepsilon' \Delta_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_i \Delta_i$

$= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$.

Aplicando el criterio de integrabilidad se tiene que f es integrable, que es lo que queríamos probar. $\square$

Volver al índice

Teorema 13

Teorema fundamental del cálculo integral

Nota: de acá en adelante, debido a las limitaciones de Gallemathic y html, voy a notar las integrales definidas de a hasta b de f(t)dt como ∫[a,b]f(t)dt.

Sea f:[a,b]→ℝ una función continua. Dado x∈[a,b] sea F:[a,b]→ℝ tal que F(x)=∫[a,x]f=∫[a,x]f(t)dt. Entonces F es continua en [a,b], derivable en (a,b) y ∀x∈[a,b] vale que F'(x)=f(x).

Veamos esto. Sea s el máximo valor que toma |f(t)| con t∈[a,b], que como f es una función continua es un número finito. Vamos a probar que F es una función continua.

- Veamos primero que F es continua en los bordes. Como F(a)=∫[a,a]f, entonces F(a)=0. Como |F(x)−F(a)|=|∫[a,x]f|≤∫[a,x]|f|=infS(|f|,P) que es el ínfimo de las sumas superiores de |f|, sobre cualquier P partición del intervalo [a,x]. Esto significa que |F(x)−F(a)|≤S(|f|,P), donde S(|f|,P) es una suma superior de |f| en una partición P, que es igual a ∑[i]MiΔi, donde Mi es el máximo de |f| en el intervalo Δi (juntando todos los Δi formo P), que es menor o igual a s∑[i]Δi, donde s, como habíamos dicho, era el máximo de |f| en [a,b].

  Tenemos entonces que |F(x)−F(a)|≤s∑[i]Δi. Pero s∑[i]Δi=s(x−a), entonces quedamos en que |F(x)−F(a)|≤s(x−a). Cuando $x \to a^+$, s(x−a)→0, con lo cual F(x)→F(a).

  Podemos hacer la misma analogía con el intervalo [x,b] hasta llegar a que |F(b)−F(x)|≤s(b−x). Como s(b−x)→0 cuando $x \to b^-$, entonces F(x)→F(b).

  Con estas dos cosas probamos que F es continua en los bordes.

- Ahora vamos a probar que F es derivable, que F'=f y que F es continua en el interior del intervalo. Para esto tomamos un punto xo∈(a,b). Sea x∈(a,b) otro punto cualquiera, calculemos lo siguiente: (F(x)−F(xo))/(x−xo).

  (F(x)−F(xo))/(x−xo) = (∫[a,x]f−∫[a,xo]f)/(x−xo)=(∫[xo,x]f)/(x−xo). Si eso tiende a f(xo) cuando x→xo, esto probaría que F es derivable, que F'=f y que F es continua en el interior.

  Como f es continua entre x y xo, que eran puntos de [a,b], entonces existen dos números reales, el máximo y el mínimo de f entre x y xo tales que m≤f(t)≤M ∀t entre x y xo. No pongo [x,xo] o [xo,x] porque no sabemos cuál es el mayor.

  Supongamos que x>xo, total el razonamiento inverso es análogo. Se tiene lógicamente que m(x−xo)≤∫[xo,x]f≤M(x−xo). Ahora, como x≠xo, trivial, y x>xo, se tiene que x−xo>0, por lo que puedo dividir todos los términos por (x−xo) y me queda que m≤(∫[xo,x]f)∕(x−xo)≤M.

Ahora,como m y M eran dos números entre x y xo, cuando $x \to xo^+$, m y M tienden a f(xo), porque f es continua. Por lo tanto $(\int[xo,x]f)/(x-xo) \to f(xo)$.

Como $(\int[xo,x]f)/(x-xo)=(F(x)-F(xo))/(x-xo)$, entonces $(F(x)-F(xo))/(x-xo) = f(xo)$ cuando $x \to xo^+$. Al probar el caso xo>x se comprueba que lim $x \to xo$ $(F(x)-F(xo))/(x-xo)=f(xo)$.

Como lim $x \to xo$ $(F(x)-F(xo))/(x-xo)=f(xo)$, se prueba que F es continua en el interior, derivable en todo el interior (y por tanto, efectivamente derivable) y F'=f, que es lo que queríamos probar □

Volver al índice

Teorema 14

Regla de Barrow

Sea f una función continua en un cerrado [a,b]. Si F es una primitiva de f, se tiene que $\int[a,b]f = F(b)-F(a)$.

Si F es la primitiva que detalla el Teorema Fundamental del Cálculo, o sea, $F(x)=\int[a,x]f$, entonces es trivial que $\int[a,b]f = F(b)-F(a)$.

Si no es esa primitiva, y la primitiva es G, entonces como ambas primitivas varían, cuando mucho, en una constante, se tiene que G = F+c. En consecuencia, $G(b)-G(a) = F(b)+c-F(a)-c = F(b)-F(a) = \int[a,b]f$.

Juntando ambas cosas se tiene que para cualquier primitiva T de f, $\int[a,b]f = T(b)-T(a)$, que es lo que queríamos probar □

Volver al índice

Teorema 15

Teorema del valor medio integral

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $\exists c \in (a,b) / \int[a,b]f=f(c)(b-a)$.

Para demostrar este teorema solo hace falta aplicar el teorema de Lagrange en una variable a la primitiva F, tal que $F(x)=\int[a,x]f$, de f.

Es decir, $F(b) = \int[a,b]f = F(b)-F(a)$.

Por Lagrange en una variable se tiene que si $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en [a,b] y diferenciable en (a,b), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $(F(b)-F(a))/(b-a)=F'(c)$. Si movemos un poco esto nos queda que $F(b)-F(a)=F'(c)(b-a)$.

Volviendo a lo anterior tenemos que $F(b) = \int[a,b]f = F(b)-F(a) = F'(c)(b-a)$.

Sin embargo, como $F'(c) = f(c)$, entonces nos queda que $F(b) = f(c)(b-a)$. Que podemos reescribir como $\int[a,b]f = f(c)(b-a)$, que es lo que queríamos probar □

Volver al índice

Teorema 16

Dado P en una curva de nivel de F(x, y) de clase C^1 tal que $\nabla F(P) \neq 0$, entonces $\nabla F(P)$ es perpendicular a la recta tangente a la curva en P.

~~Teoría~~ Teorema: Sea $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. F es C^1

Sea $C = \{ F(X) = 0 \, ; \, X \in \mathbb{R}^n \}$ $P \in C$.

$\Longrightarrow \nabla F(P) \perp$ al gráfico de C en P.
(superficie de)

Demostración:

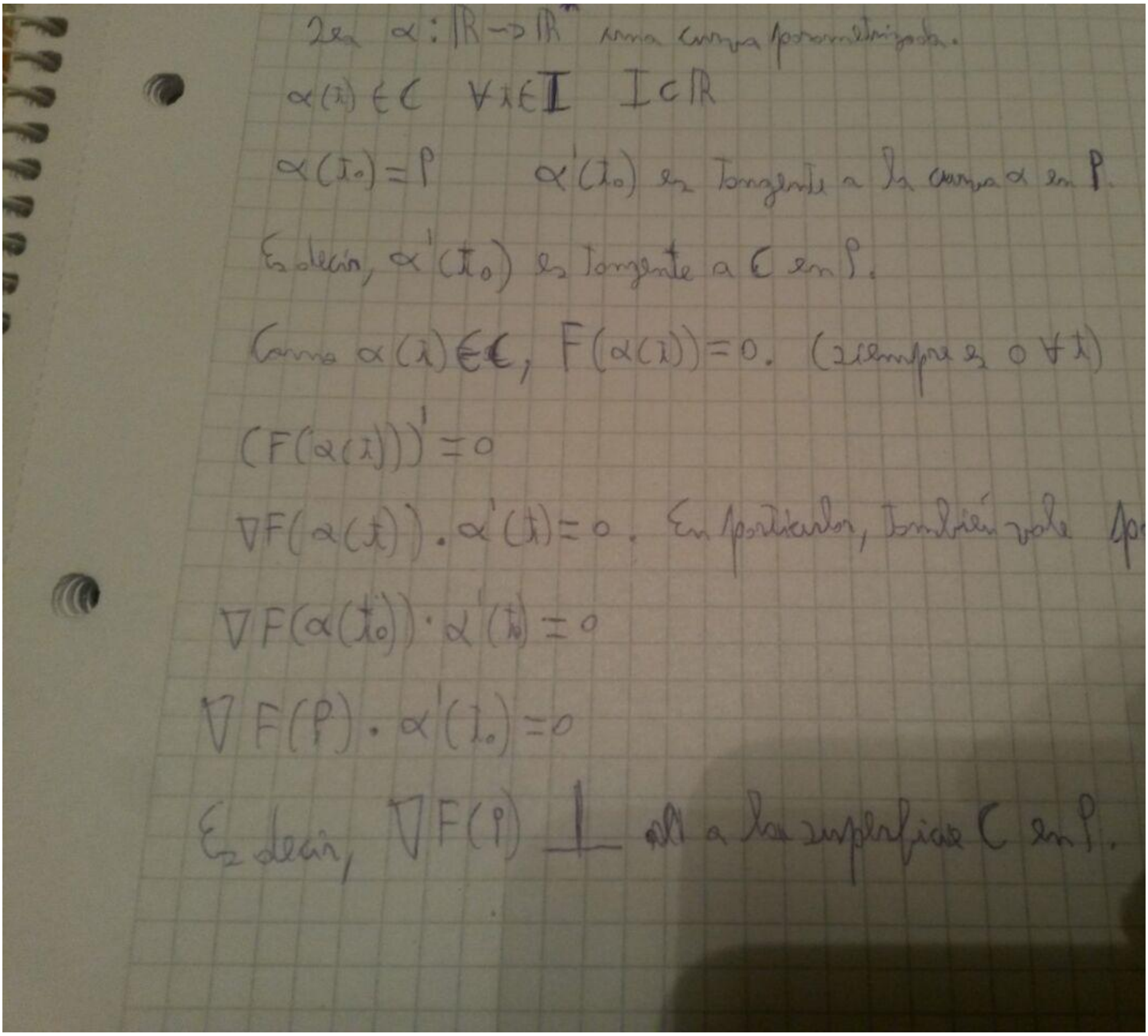
Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada.

$\alpha(t) \in C \quad \forall t \in I \quad I \subset \mathbb{R}$

$\alpha(t_0) = P \qquad \alpha'(t_0)$ es tangente a la curva α en P

Es decir, $\alpha'(t_0)$ es tangente a C en P.

Como $\alpha(t) \in C \quad F(\alpha(t)) = 0$ (...)



Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada.

$\alpha(t) \in C \quad \forall t \in I \quad I \subset \mathbb{R}$

$\alpha(t_0) = P \qquad \alpha'(t_0)$ es tangente a la curva α en P.

Es decir, $\alpha'(t_0)$ es tangente a C en P.

Como $\alpha(t) \in C$, $F(\alpha(t)) = 0$. (siempre es 0 $\forall t$)

$(F(\alpha(t)))' = 0$

$\nabla F(\alpha(t)) . \alpha'(t) = 0$. En particular, también vale p

$\nabla F(\alpha(t_0)) \cdot \alpha'(t_0) = 0$

$\nabla F(P) \cdot \alpha'(t_0) = 0$

Es decir, $\nabla F(P) \perp$ a la superficie C en P.

(Cortesía de Ezequiel Togno)

Volver al índice

Teorema 17

Este es el de **las derivadas cruzadas coinciden**. Dado que no se toma nunca y su demostración es medio complicada, no voy a subirlo. Si se quiere ver por cuenta propia, está en la página 109 del Cálculo de Larotonda.

Volver al índice

Teorema 18

Teorema de Lagrange en $\mathbb{R}^n$

Proposición 3.3.1. *(Lagrange) Sea $f : B_r(P) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable. Entonces para todo $Q, R \in B_r(P)$ existe un punto P_0 en el segmento que une Q con R tal que*

$$f(Q) - f(R) = \langle \nabla f_{P_0}, Q - R \rangle.$$

Demostración. Consideremos la parametrización del segmento que une Q con P, $g(t) = R + t(Q - R)$. Entonces $h(t) = f \circ g(t)$ está definida en $[0,1]$, y es diferenciable en $(0,1)$ por la regla de la cadena. Es más $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua pues f es continua por ser diferenciable. Entonces, por el Teorema de Lagrange en una variable, existe $c \in (0,1)$ tal que $h(1) - h(0) = h'(c)$. Pero por la regla de la cadena, $h'(c) = Df_{g(c)} g'(c) = Df_{g(c)}(Q - R)$. Si llamamos $P_0 = g(c)$, se tiene la afirmación. $\square$

[Volver al índice](#)

Teorema 19

Teorema de Fermat en $\mathbb{R}^n$

Teorema 3.3.5. *(Fermat en $\mathbb{R}^n$) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable, con A abierto. Supongamos que $P \in A$ es un extremo local de f. Entonces $Df_P = \nabla f_P = \mathbb{O}$. Equivalentemente, todas las derivadas parciales de f se anulan en P.*

Demostración. Supongamos que P es un máximo local de f. Como $P \in A$ es un punto interior, podemos suponer que existe $r > 0$ y una bola abierta $B_r(P) \subset A$ tal que $f(P) \geq f(X)$ para todo $X \in B_r(P)$. Consideremos la función auxiliar $g(t) = f(P + tE_i)$, donde E_i es un vector de la base canónica. Entonces $g : (-r, r) \to \mathbb{R}$ es una función derivable, que tiene un máximo local en $t = 0$ pues $g(0) = f(P) \geq f(P + tE_i) = g(t)$. En consecuencia, debe ser $g'(0) = 0$. Pero esta derivada en cero es exactamente (usando la definición) la derivada parcial i-ésima de f en P. Esto prueba que $f_{x_i}(P) = 0$, y como i es cualquiera entre 1 y n, se tiene que el gradiente de f es cero en P. $\square$

[Volver al índice](#)
