Parcial de computabilidad

Lógica y computabilidad

Segundo cuatrimestre de 2014

El examen es a libro abierto y se puede suponer demostrado lo dado en las clases y las soluciones a ejercicios de las guías colocando referencias claras. Entregar cada ejercicio en hojas separadas. En cada hoja debe figurar nombre, apellido y número de orden. El examen consta de 4 ejercicios de igual valor. Cada ejercicio será calificado con A (aprobado), R (regular) o I (insuficiente), ocasionalmente con un signo - (menos). Para aprobar un parcial es necesario tener al menos dos ejercicios calificados con A o A-. Para promocionar es necesario tener al menos tres ejercicios calificados con A o A- en ambos parciales o sus correspondientes recuperatorios.

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{C}$ la mínima clase de funciones que contiene a la función nula $n(x) = 0$, todas las proyecciones y es cerrada por composición y por recursión primitiva. Demostrar que para toda función $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ de $\mathcal{C}$ se cumple $f(x_1, ..., x_n) \leq \text{máx}(x_1, ..., x_n)\ \forall\ x_1, ..., x_n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2. Decidir si las siguientes funciones son computables o no. Justificar la respuesta.

a. $$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si para algún } y \in \mathbb{N},\ \Phi_{x+y}(x) = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b. $$f_2(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_{x+y}(x) = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 3. Decidir si el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{N} : \text{para todo } y \in \mathbb{N},\ \Phi_x^{(1)}(2y+1)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(2y+1) \text{ es par}\},$$

es sólo computablemente enumerable, sólo co-computablemente enumerable, ambas cosas o ninguna. Justificar la respuesta.

Ejercicio 4. Para $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función total computable y $A \subseteq \mathbb{N}$ un conjunto de números naturales, definimos $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ como la imagen de f sobre A. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justificar la respuesta.

a. Si A es computablemente enumerable entonces $f(A)$ también lo es.

b. Si $f(A)$ es computablemente enumerable entonces A también lo es.